AMPLIACION DE MATEMATICAS

1ª PARTE

por

D. Rafael Portaencasa Baeza

2ª EDICION

Imprime: Dpto. de Publicaciones de la E.T.S.
de Ingenieros de Telecomunicación.
Ciudad Universitaria. Madrid-3
Depósito Legal: M-34183-1974
I.S.B.N.: 84-600-6023-3

INDICE

Pág.

Pág.

Introducción

INTRODUCCION

1.- Bosquejo histórico de los conceptos fundamentales.-

El desarrollo de la noción moderna de integral está estrechamente relacionado con la evolución de la idea de función y con el estudio a fondo de las funciones numéricas de variables reales, que se ha venido realizando desde principios del siglo XIX. Euler concebía ya la noción de función de una forma bastante general, puesto que para él una curva "arbitraria" que es cortada en un único punto por toda paralela al eje Oy define una función $y = f(x)$, pero se niega a admitir que tales funciones puedan expresarse "analíticamente". Este punto de vista no se modificó demasiado hasta los trabajos de Fourier, pero el descubrimiento por este último de la posibilidad de representar funciones discontinuas como sumas de series trigonométricas iba a ejercer una influencia decisiva sobre las generaciones siguientes. Es necesario añadir que las demostraciones de Fourier carecían de todo rigor, y que su dominio de validez no aparecía claramente; sin embargo, las fórmulas integrales

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \operatorname{sen} nx dx \quad (n \geqslant 1) \tag{1}$$

que proporcionan los corficientes del desarrollo de $\varphi(x)$ en serie de Fourier, tenían un sentido intuitivo evidente desde el momento que se suponía que φ era continua y monótona a trozos. También Dirichlet se limita en principio a estas funciones en la célebre memoria en la que establece la convergencia de la serie de Fourier, pero ya al final de su trabajo se preocupa de la extensión de sus resultados a clases más amplias de funciones. Es sabido que fué en esta ocasión cuando Dirichlet, precisando las ideas de Fourier, define la noción general de función tal y como se entiende hoy; el primer punto a dilucidar era naturalmente el de saber en qué casos seguía siendo posible dar un sentido a las fórmulas (1). "Cuando las soluciones de continuidad de φ son infinitas" dice Dirichlet, "es necesario que entonces la función $\varphi(x)$ sea tal que, si designamos por a y b dos cantidades cualesquiera comprendidas entre $-\pi$ y $+\pi$, puedan encontrarse siempre otras cantidades r y s entre a y b lo bastante próximas para que la función sea continua en el intervalo entre r y s. Se sentirá fácilmente la necesidad de esta restricción al considerar que los diferentes términos de la serie de Fourier son integrales definidas y remontándose a la noción fundamental de integral. Se verá entonces que la integral de una función no tiene otro significado que el de que la función satisface la condición enunciada anteriormente.

En términos modernos, Dirichlet parece creer que la integrabilidad es equivalente al hecho de que los puntos de discontinuidad formen un conjunto "diseminado".

Riemann, en 1.854 vuelve a considerar la cuestión (siempre a propósito de las series trigonométricas) y siente la necesidad de justificar su trabajo:"Cualquiera que sea nuestra ignorancia respecto a la manera según la cual las fuerzas y los estados de la materia varían con el tiempo y el lugar en el infinitamente pequeño, podemos tener por seguro que las funciones a las que no son aplicables los resultados de Dirichlet no intervienen en los fenómenos naturales. Sin embargo, parece que estos casos no tratados por Dirichlet son dignos de atención por dos razones. Primeramente, este tema está muy estrechamente relacionado con los principios del cálculo infinitesimal, y puede servir para aportar mayor claridad y seguridad a estos principios. Desde este punto de vista, su estudio tiene un interés inmediato. En segundo lugar, la aparición de las series de Fourier no se limita a los trabajos de física, hoy día son aplicadas también con éxito en un dominio de las matemáticas puras, la teoría de números, y parece que aquí son precisamente las funciones cuyo desarrollo en serie trigonométrica no ha sido estudiado por Dirichlet las que ofrecen interés.

La idea de Riemann es la de partir del procedimiento de aproximación de la integral, cuya importancia fué señalada por Cauchy, y determinar cuándo las "sumas de Riemann" de una función f, en un intervalo acotado $[a,b]$ tienden hacia un límite (cuando la longitud máxima de los subintervalos de la división tiende hacia 0), problema cuya solución obtiene sin gran trabajo en la siguiente forma: para cada $\alpha > 0$ existe una subdivisión de $[a,b]$ en intervalos parciales de longitud máxima suficientemente pequeña para que la suma de las longitudes de los intervalos de esta subdivisión en los que la oscilación de f es $> \alpha$, sea arbitrariamente pequeña. Y demuestra además que esta condición es verificada no solamente por las funciones continuas y monótonas a trozos, sino también por funciones que pueden tener un conjunto de puntos de discontinuidad denso.

La forma dada por Riemann a la condición de integrabilidad sugería la idea de la "medida" del conjunto de puntos de discontinuidad de una función en un intervalo, pero todavía deberían transcurrir treinta años antes de que se llegase a dar una definición fecunda y cómoda de esta noción.

Los primeros intentos en esta dirección se deben a Stolz, Harnack y Cantor; para definir la "medida" de una parte E acotada de R, los dos primeros consideran conjuntos $F \supset E$ que sean uniones finitas de intervalos, toman para cada F la suma de las longitudes de los intervalos correspondientes, y llaman "medida" de E al extremo inferior de estos números; mientras que Cantor, situándose ya desde el principio en R^n, considera, para un conjunto E acotado y para $\varrho > 0$ el entorno $V(\varrho)$ de E formado por los puntos cuya distancia a E es $\leqslant \varrho$, y toma el extremo inferior del "volumen" de $V(\varrho)$. Con esta definición resulta que la "medida" de un conjunto es igual a la de su adherencia, de donde se deduce en particular que la "medida" de la unión de dos conjuntos sin puntos comunes puede ser estrictamente inferior a la suma de las "medidas" de estos dos conjuntos. Peano y Jordan introducen, al lado de la "medida" de Cantor $\mu(A)$ de un conjunto A contenido en un "rectángulo" I, su "medida interior" $\mu(I)-\mu(I-A)$ y llaman "medibles" a los conjuntos A (que ahora llamamos "cuadrables")para los cuales estos dos números coinciden. La unión de dos conjuntos cuadrables A y B sin puntos comunes es entonces cuadrable y tiene como "medida" la suma de las "medidas" de A y B, pero un conjunto abierto y acotado no es necesariamente cuadrable, y el conjunto de los números racionales contenidos en un intervalo acotado tampoco lo es, lo que quitaba mucho interés a la noción de Peano-Jordan.

A E. Borel corresponde el mérito de haber sabido discernir los defectos de las definiciones anteriores y de haber visto la forma de remediarlos. Se sabía desde Cantor que todo conjunto abierto U de R es la unión de la familia numerable de sus "componentes", intervalos abiertos tales que dos cualesquiera de ellos no tienen ningún punto común; en vez de intentar aproximar U "desde fuera", encerrándolo en una sucesión finita de intervalos, Borel, apoyándose en el resultado anterior, propone tomar como medida de U (cuando U es acotado) la suma de las longitudes de sus componentes. Después describe muy sumariamente las clases de conjuntos (llamados más tarde "borelianos") que se pueden obtener a partir de los conjuntos abiertos, iterando indefinidamente las operaciones de unión numerable y de "diferencia" A-B e indica que, para estos conjuntos, se puede definir una medida que posee la propiedad fundamental de la aditividad completa: si una sucesión (A_n) está formada por conjuntos borelianos disjuntos dos a dos, la medida de su unión (supuesto que es acotada) es igual a la suma de sus medidas.

Esta definición debía inaugurar una nueva era del Análisis: por una parte, en relación con los trabajos contemporáneos de Baire, era el punto de partida de toda una serie de trabajos de naturaleza topológica acerca de la clasificación de los conjuntos de puntos y, sobre todo, serviría de base para la extensión de la noción de integral, llevada a cabo por Lebesgue en los primeros años del siglo XX.

Lebesgue comienza por desarrollar y precisar las suscintas indicaciones de E. Borel; a imitación del método de Peano-Jordan, la "medida exterior" de un conjunto acotado $A \supset R$ se define como el extremo inferior de las medidas de los conjuntos abiertos que contienen A; después, si I es un intervalo que contiene a A, la "medida interior" de A es la diferencia entre las medidas exteriores de I y de I-A, de este modo se obtiene una noción de "conjunto medible" que solamente difiere de la definición "constructiva" inicial de Borel por el hecho de añadir una parte de un conjunto de medida nula en el sentido de Borel. Esta definición se extendía inmediatamente a los espacios R^n, la antigua concepción de la integral definida $\int_a^b f(t)dt$ de una función acotada y $\geqslant 0$ como "área" limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$, proporcionaba entonces una extensión inmediata de la integral de Riemann a todas las funciones para las que estuviese definida la medida del conjunto precedente. Pero la originalidad de Lebesgue no reside tanto en la idea de esta extensión como en su descubrimiento del teorema fundamental sobre el paso al límite en la integral así concebida, teorema que aparece en él como consecuencia de ser la medida completamente de su importancia y hace de él, la piedra angular de la exposición didáctica de su teoría que realiza en sus célebres "Lecons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives" ("Lecciones sobre la integración y el cálculo de funciones primitivas").

No podemos aquí detenernos a describir detalladamente los innumerables progresos que supondrían los resultados de Lebesgue en el estudio de los problemas clásicos del cálculo infinitesimal. El mismo había aplicado ya, en su tesis, su teoría a la extensión de las nociones clásicas de longitud y de área a conjuntos más generales que las curvas y superficies usuales. Mencionemos también las aplicaciones a las series trigonométricas, desarrolladas por Lebesgue casi inmediatamente después de su tesis y que abrirían nuevos horizontes en esta teoría, cuya exploración está lejos de haberse terminado. Por último, y fundamentalmente, la definición de los espacios L^p y el teorema de Fischer-Riesz, ponían en evidencia el papel que podía tener en el Análisis funcional la nueva noción de integral, papel que no haría otra cosa que crecer con las generalizaciones posteriores de esta noción, de las que hablaremos después.

Antes de esto nos detendremos un poco más extensamente en uno de los problemas a los que Lebesgue dedicó más esfuerzos, la relación entre las nociones de integral y de primitiva. Con motivo de la generalización de la integral introducida por Riemann se había planteado de un modo natural la cuestión de saber si la correspondencia clásica entre integral y primitiva, válida para las funciones continuas, seguía siéndolo en casos más generales. Es fácil sin embargo dar ejemplos de funciones integrables en el sentido de Riemann y tales que $\int_a^x f(t)dt$ no tenga derivada (ni siquiera derivada a la derecha o a la izquierda) en ciertos puntos; recíprocamente, mediante un análisis extraordinariamente sutil (para el que no era suficiente, ni mucho menos, el teorema del paso al límite en la integral). Lebesgue consiguió demostrar que, si f es integrable (en su sentido) en $[a,b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ tiene en casi todo punto una derivada igual a $f(x)$. Recíprocamente, si una función g es derivable en $[a,b]$ y si su derivada $g' = f$ es acotada, entonces f es integrable y se tiene la fórmula $g(x) - g(a) = \int_a^x f(t)dt$. Pero Lebesgue señala que el problema es mucho más complejo cuando g' no es acotada, en este caso g' no es necesariamente integrable, y el primer problema era por tanto el de caracterizar las funciones continuas g para las que g' existe en casi todo punto y es integrable. Limitándose al caso en que uno de los "números derivados" de g es siempre finito, Lebesgue mostró que g es entonces necesariamente una función de variación acotada. Finalmente establece una recíproca de este último resultado: una función de variación acotada g admite en casi todo punto una derivada, y g' es integrable, pero ya no se tiene necesariamente

$$g(x) - g(a) = \int_a^x g'(t)dt \tag{2}$$

la diferencia entre los dos miembros de esta relación es una función de variación acotada no constante y su derivada es nula en casi todo punto (función "singular"). Faltaba caracterizar las funciones de variación acotada g tales que se verifique la relación (2). Lebesgue estableció que estas funciones son aquellas que poseen la propiedad siguiente: la variación total de g en un conjunto abierto U (suma de las variaciones totales de g en cada una de las componentes conexas de U) tiende a 0 con la medida de U.

Veremos después cómo estos resultados, bajo una forma más débil, adquirirían más tarde un alcance mucho más general. En su forma inicial, su campo de aplicación era bastante restringido, y no superaba el marco de la teoría de las funciones de variables reales.

Uno de los avances esenciales aportados por la teoría de Lebesgue se refiere a las integrales múltiples. Esta noción había sido introducida hacia mediados del siglo XVIII y lo fué primeramente en la forma de "integral indefinida" (por analogía con la teoría de la integral para las funciones de una variable, $\iint f(x, y)dxdy$ designa una solución de la ecuación $\partial^2 z/\partial x\partial y= f(x, y)$ pero ya tiene Euler una concepción muy clara de la integral doble extendida a un dominio acotado (limitado por arcos de curvas analíticas), y escribe correctamente la fórmula que permite calcular una integral de este tipo mediante dos integrales simples sucesivas. No era difícil justificar esta fórmula a partir de "sumas de Riemann" mientras la función integrada fuese continua y el dominio de integración no demasiado complicado, pero a partir del momento en que se querían abordar casos más generales, el procedimiento de Riemann encontraba ciertas dificultades ($f(x, y)$ puede ser integrable en el sentido de Riemann sin que $\int dx \int f(x, y)dy$ tenga sentido, considerando las integrales simples en el sentido de Riemann). Estas dificultades desaparecen cuando se pasa a la definición de Lebesgue, ya este último había mostrado en su tesis que, cuando $f(x, y)$ es una "función de Baire" acotada, también lo son las funciones $y \to f(x, y)$ (para todo x) y $x \to \int f(x, y)dy$, y se tiene la fórmula

$$\iint f(x, y)\ dxdy = \int dx \int f(x, y)dy \tag{3}$$

(integral tomada sobre un rectángulo). Fubini aporta un complemento importante a este resultado demostrando que, si se supone solamente que f es integrable, entonces el conjunto de las x tales que $y \to f(x, y)$ no es integrable, es de medida nula, lo que permitía extender inmediatamente la fórmula (3) a este caso.

Finalmente, Lebesgue aborda la extensión a las integrales múltiples de sus resultados acerca de las derivadas de las integrales simples. De este modo, asocia a una función f, integrable en toda parte compacta de R^n, la función de conjunto $F(E) = \int_E f(x)dx$, definida para toda parte integrable E de R^n, que generaliza el concepto de "integral indefinida", y señala con este motivo que esta función posee las dos propiedades siguientes: 1º es completamente aditiva; 2º es "absolutamente continua" en el sentido de que $F(E)$ tiende a 0 con la medida de

E. La parte fundamental de la memoria de Lebesgue consiste en demostrar la proposición recíproca de ésta. Pero no se detiene aquí, y, hace notar la posibilidad de generalizar la noción de función de variación acotada, considerando las funciones de conjunto medible F(E) completamente aditivas y tales que $\sum_n |F(E_n)|$ permanezca acotada para toda partición numerable de E en partes medibles E_n. Y, si bien se limita a considerar solamente funciones de esta clase en el conjunto de los "rectángulos" de R^n, está bien claro que solamente había que dar un paso para llegar a la noción general de medida que va a definir J. Randon en 1.913, englobando en una misma síntesis la integral de Lebesgue y la integral de Stieltjes, de la que vamos a hablar ahora.

T. Stieltjes publica, con el título "Recherches sur les fractions continues" ("Investigaciones sobre las fracciones continuas"), una memoria en la que, apartir de una cuestión aparentemente muy particular, se planteaban y resolvían, con gran elegancia, problemas de naturaleza completamente nueva en la teoría de funciones analíticas y en la de funciones de una variable real. Buscando una representación del límite de una cierta sucesión de funciones analíticas, Stieltjes, entre otros, se había visto llevado a introducir, sobre la recta, el concepto de una "distribución de masa" positiva, noción familiar desde mucho antes en las ciencias físicas, pero que hasta entonces solamente había sido considerada en matemáticas con una serie de hipótesis restrictivas (en general, la existencia de una "densidad" en todo punto, variando de forma continua); Stieltjes señala que una distribución de este tipo equivale a una función creciente $\varphi(x)$ que da la masa total correspondiente al intervalo de extremos 0 y x para $x > 0$, y esta masa cambiada de signo para $x < 0$, correspondiendo las discontinuidades de φ a las masas "concentradas en un punto". Stieltjes forma entonces, para una distribución de este tipo en un intervalo $[a,b]$, las "sumas de Riemann" $\sum_i f(\xi_i)[(\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)]$ y demuestra que, cuando f es continua en $[a,b]$, estas sumas tienden hacia un límite que designa por $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$. No necesitando integrar más que funciones continuas (e incluso derivables), Stieltjes no llevó más adelante el estudio de esta integral. Pero en 1.909, F. Riesz demostraba que las integrales de Stieltjes $f \to \int_a^b fd\varphi$ son los funcionales lineales continuos más generales sobre el espacio (I) de las funciones numéricas continuas sobre el intervalo $I = [a,b]$ (estando dotado (I) de la Topología de la convergencia uniforme y la elegancia y sencillez de este resultado suscitaron inmediatamente diversas generalizaciones; combinando las ideas de F. Riesz y de Lebesgue se mostró la forma de definir una integral mediante los procedimientos de Lebesgue partiendo de una "función de conjunto completamente aditiva" cualquiera (definida sobre los conjuntos medibles para la medida de Lebesgue) en vez de partir de la medida de Lebesgue. En la noción de "medida de Radon" sobre R^n así definida estaba "incluida" la de función "de variación acotada": la descomposición de una función de variación acotada en diferencia de dos funciones crecientes es un caso particular de la descomposición de una medida en diferencia de dos medidas positivas; igualmente, la "medida de base μ" corresponde a la noción de función "absolutamente continua", y la descomposición de una medida cualquiera en una medida de base μ y una medida "singular", a la descomposición de Lebesgue de una función de variación acotada en suma de una función absolutamente continua y una función "singular". Además, Radon demostró que la "densidad", respecto a μ de una medida de base μ sigue existiendo cuando μ es una medida que tiene como base la medida de Lebesgue, utilizando una idea anterior de F. Riesz, que consiste en contruir una imagen de la medida μ por medio de una aplicación ϑ de R^n en R, elegida de tal modo que $\vartheta(\mu)$ sea la medida de Lebesgue sobre R.

Casi inmediatamente después de la aparición de la memoria de Radon, Fréchet señalaba que casi todos los resultados de este trabajo podrían extenderse al caso en que la "función de conjunto completamente aditiva", en vez de estar definida para las partes medibles de R^n, está definida para ciertas partes de un conjunto E cualquiera (estas partes deben ser tales que las operaciones de unión numerable y de "diferencia" den lugar a conjuntos para los que esté definida la función). Sin embargo, la expresión de una medida de base μ en la forma $g.\mu$ se apoyaba en Lebesgue y Radon en razonamientos en los que intervenía de modo decisivo la Topología de R^n (y hemos visto que la demostración de Radon es válida solamente si μ es una medida que tiene como base la medida de Lebesgue), y hasta 1.930 no obtiene O. Nikodym este teorema en su forma general mediante un razonamiento directo (notablemente simplificado después por J. von Neumann gracias al empleo de las propiedades de los espacios L^2.

Con la memoria de Radon la teoría general de la integración puede considerarse como terminada en sus grandes líneas; entre los avances esenciales posteriores solamente podemos citar la definición de producto infinito de medidas, debido a Daniell, y la de integral de una función con valores en un espacio de Banach, dada por Bochner en 1.933, que anunciaba el estudio más general de la "integral débil" desarrollado algunos años después por Gelfand, Dunford y Pettis.

Pero todavía había que popularizar la nueva teoría y convertirla en una herramienta matemática de uso corriente, en tanto que la mayoría de los matemáticos, hacia 1.910 consideraban únicamente la "integral de Lebesgue" como un instrumento de alta precisión y de delicado manejo, destinado solamente a trabajos de sutileza y abstracción extremadas. Esta fué la obra de Carathéodory, en un libro que se consideró durante mucho tiempo como un clásico y que enriqueció además la teoría de Radon con numerosas observaciones originales.

Pero es también en este libro cuando, por primera vez, la noción de integral, que había sido una de las preocupaciones principales de Lebesgue, cede la primacía a la de medida, que para Lebesgue (como antes para Jordan) solo había sido un medio técnico auxiliar. Este cambio de punto de vista se debía, sin duda, en Carathéodory a la excesiva importancia que parece haber concedido a las "medidas p-dimensionales". A partir de entonces los autores que se han ocupado de la integración se han dividido entre estos dos puntos de vista, no sin originar una serie de debates. Los unos han seguido a Carathéodory; en sus exposiciones cada vez más abstractas y axiomatizadas, la medida, con todos los refinamientos técnicos a los que se presta, no solamente desempeña el papel principal, sino que tiende a perder contacto con las estructuras topológicas a las que está en realidad ligada en la mayor parte de los problemas en que interviene. Otras exposiciones siguen, más o menos, un método ya indicado por W.H. Young y desarrollado después por Daniell. El primero, al tratar la integral de Lebesgue, partía de la "integral de Cauchy" de las funciones continuas con soporte compacto, que se suponía conocida, para definir sucesivamente la integral superior de las funciones semicontinuas inferiormente y, después de las funciones numéricas cualesquiera, obteniéndose de esta manera una definición de las funciones integrables, calcada sobre la de Lebesgue para los conjuntos, por medios únicamente "funcionales". Daniell, en 1.918 extendió esta exposición, con algunas modificaciones, a funciones definidas en un conjunto cualquiera; dentro del mismo orden de ideas - (y estrechamente relacionada con los métodos empleados en teoría espectral antes de Gelfand) debemos señalar también la memoria de F. Riesz que expone en una forma concisa y elegante los resultados de la teoría de los espacios ordenados que intervienen en la teoría de la Integración.

Más que en lo relativo a las obras expositivas, es en lo que se refiere a las aplicaciones donde debemos buscar los progresos realizados por la teoría de la integración desde 1.920: teoría de la probabilidad (en otro tiempo pretexto para adivinaciones y paradojas, y que se ha convertido en una rama de la teoría de la Integración desde su axiomatización por Kolmogorov, pero en una rama autónoma con sus métodos y problemas propios); teoría ergódica; teoría espectral y análisis armónico, desde el descubrimiento por Haar de la medida que lleva su nombre, y el movimiento de ideas provocado por este descubrimiento han hecho de la integral uno de los instrumentos más importantes en la teoría de grupos.

1

Integral

de

Riemann-Stieltjes

LECCION 1

INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES

1.- Definición.-

Consideremos un intervalo $[a,b] \in R$. Efectuemos una partición del mismo por los puntos:

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b$$

siendo:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n$$

En cada uno de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, elegimos un punto ξ_i:

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

Sean $f(x)$ y $\varphi(x)$ dos funciones reales, definidas y acotadas en $[a,b]$.

Se forma la expresión:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$$

que se llama suma de Riemann-Stieltjes de f con respecto a φ.

Si esta suma admite límite finito para toda sucesión de particiones P_1, $P_2 \ldots$ cuyos diámetros forman una sucesión nula, con independencia de los puntos ξ_i elegidos, se llama a dicho límite integral de Riemann-Stieltjes de la función $f(x)$ (integrando), respecto de la función de distribución $\varphi(x)$ (integrador), en el intervalo $[a,b]$, y la representamos así:

$$\int_a^b f(x) \, . \, d\varphi(x)$$

En el caso particular de que $\varphi(x) = x$, nos queda la integral de Riemann:

$$\int_a^b f(x) . dx$$

La integral de Riemann-Stieltjes permite la realización del estudio, con mayor generalidad que lo permitiría la de Riemann, de problemas de Estática en los que la carga no sea de naturaleza continua ó de problemas de Estadística y Cálculo de Probabilidades en los que se manejen distribuciones continuas ó discontinuas.

2.- Propiedades.-

2.1.- Propiedad aditiva de intervalos.-

De modo similar al utilizado para demostrar esta propiedad correspondiente a la integral de Riemann, se puede establecer para las integrales de Riemann-Stieltjes, la siguiente propiedad:

$$\int_a^b f(x).d\varphi(x) + \int_b^c f(x).d\varphi(x) = \int_a^c f(x).d\varphi(x) \,, \quad \text{siendo} \quad a < b < c$$

2.2.- Propiedades de linealidad.-

a) Si f(x) y g(x) son integrables según R-S respecto de $\varphi(x)$, y $\underline{m}$ y $\underline{n}$ son constantes, se tiene:

$$\int_a^b (m.f(x)+n.g(x)).d\varphi(x) = m.\int_a^b f(x).d\varphi(x) + n.\int_a^b g(x).d\varphi(x)$$

b) Si f(x) es integrable según R-S respecto de $\varphi(x)$ y $\omega(x)$, se tiene:

$$\int_a^b f(x).d[m.\varphi(x)+n.\omega(x)] = m.\int_a^b f(x).d\varphi(x) + n.\int_a^b f(x).d\omega(x)$$

2.3.- Acotación.-

Si en $[a,b]$, la función f(x) está acotada, $|f(x)| < k$, se tiene:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})]\right| < k.\left|\sum_{i=1}^{n}[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})]\right| = k\,|\varphi(b)-\varphi(a)|$$

luego la integral según R-S, también está acotada.

2.4.- Integración por partes.-

En la integral de Riemann-Stieltjes existe una importante relación entre el integrado f(x) y el integrador $\varphi(x)$ y que es la siguiente:

Si existe la integral según R-S de f(x) respecto de $\varphi(x)$, también existe la integral según R-S de $\varphi(x)$ respecto de $f(x)$ en el mismo intervalo $[a,b]$, y se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x)\,.\,d\varphi(x) + \int_a^b \varphi(x)\,.\,df(x) = f(b)\,.\,\varphi(b) - f(a)\,.\,\varphi(a)$$

Esta última igualdad se denomina fórmula de integración por partes.

Para demostrarla, como por hipótesis existe $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$, se tiene que, dado un $\varepsilon > 0$, se verifica:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})] - \int_a^b f(x)\,.\,d\varphi(x) \right| < \varepsilon$$

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$$

Formamos la suma, eligiendo la misma partición:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi'_i)\,.\,[f(x_i) - f(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi'_i)\,.\,f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi'_i)\,.\,f(x_{i-1}) \qquad (1)$$

$$x_{i-1} \leqslant \xi'_i \leqslant x_i$$

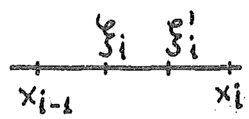
Escribimos la identidad:

$$H = f(b)\,.\,\varphi(b) - f(a)\,.\,\varphi(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,.\,\varphi(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,.\,\varphi(x_{i-1}) \qquad (2)$$

Restando (1) y (2), se tiene:

$$H - \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi'_i)\,.\,[f(x_i) - f(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[\varphi(x_i) - \varphi(\xi'_i)] + \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})[\varphi(\xi'_i) - \varphi(x_{i-1})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=2n} f(x_k)\,.\,[\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})]$$



Esta última igualdad la hemos obtenido combinando las dos sumas anteriores en una sola, considerando la partición obtenida de la inicial x_0, $x_1, \ldots,$ x_{i-1}, x_i, $\ldots$, x_n, al subdividirla con los puntos ξ'_i.

Cómo el segundo miembro tiene límite $\int_a^b f(x)\,.\,d\varphi(x)$ existe y se tendrá:

$$H-\int_a^b \varphi(x).df(x) = \int_a^b f(x)d\varphi(x)$$

$$H = \int_a^b \varphi(x)df(x) + \int_a^b f(x).d\varphi(x) = f(b).\varphi(b) + f(a).\varphi(a)$$

3.- Reducción a una integral de Riemann.-

Si existe la integral según R-S de f(x) respecto a $\varphi(x)$, $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$, y la función de distribución $\varphi(x)$ tiene una derivada $\varphi'(x)$ continua es $[a,b]$, podemos reducir la integral según R-S a una integral de Riemann, y se tiene:

$$\int_a^b f(x).d\varphi(x) = \int_a^b f(x).\varphi'(x).dx$$

Para demostrarlo, consideremos una partición $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n$ y formemos la suma de R-S correspondiente a la integral del primer miembro y le aplicamos el teorema del valor medio:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.\varphi'(\alpha_i) \qquad (1)$$

siendo:

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i;\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1};\ x_{i-1} \leqslant \alpha_i \leqslant x_i$$

Análogamente, escribamos la suma de Riemann correspondiente a la integral del segundo miembro inicial, considerando la misma partición y los mismos puntos ξ_i:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\varphi'(\xi_i).\Delta x_i \qquad (2)$$

Restando (1) y (2) queda:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i.\varphi'(\alpha_i) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\varphi'(\xi_i).\Delta x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\varphi'(\alpha_i)-\varphi'(\xi_i)]\Delta x_i\right| = H$$

La función f(x) está acotada, luego $|f(x)| < M$, en $[a,b]$. Asimismo como $\varphi'(x)$ es continua en $[a,b]$, será uniformemente continua en $[a,b]$, luego dado un $\varepsilon > 0$, existe un δ (que depende sólo de ε), tal que se cumplirá:

$$|\varphi'(\alpha_i)-\varphi'(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{M.(b-a)}$$

Luego, se tendrá:

$$H < \left| \sum_{i=1}^{n} M \cdot \frac{\varepsilon}{M(b-a)} . \Delta x_i \right| = \frac{M.\varepsilon.(b-a)}{M.(b-a)} = \varepsilon$$

Luego (1) y (2) tienen el mismo límite, y se tendrá que el de (2) existe, cumpliéndose la igualdad inicial.

4.- Funciones escalonadas como funciones de distribución.-

Sea $\varphi(x)$ una función acotada y definida en $[a,b]$ de tal manera que sea discontinua en un número finito p de puntos c_k, siendo:

$$a \leqslant c_1 < c_2 < \dots < c_p \leqslant b$$

Si la función $\varphi(x)$ es constante en cada intervalo abierto (c_{k-1}, c_k), se dice que $\varphi(x)$ es una función escalonada y el número.

$S_k = \varphi(c_k+) - \varphi(c_k-)$, se llama el salto en c_k. Si $c_1 = a$, el salto en c_1 es $S_1 = \varphi(c_1+) - \varphi(c_1)$, y si $c_p = b$, el salto en c_p es: $S_p = \varphi(c_p) - \varphi(c_p-)$.

Veamos cómo las funciones escalonadas relacionan las integrales de R-S con las sumas finitas, para ello vamos a demostrar el siguiente teorema:

Sea $\varphi(x)$ una función escalonada definida en $[a,b]$, con saltos S_1, $S_2, \dots S_p$ en los puntos $a \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_p \leqslant b$.

Sea la función $f(x)$ definida en $[a,b]$, con la condición de que $f(x)$ y $\varphi(x)$ no sean a la vez discontinuas a la derecha ó a la izquierda de los puntos del salto x_k. Vamos a demostrar que la integral según R-S, $\int_a^b f(x).d\varphi(x)$ existe y se cumple:

$$\int_a^b f(x).d\varphi(x) = \sum_{k=1}^{p} f(x_k) S_k$$

Para demostralo, consideremos la función:

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < c_1 \\ S_1 & \text{si} \quad c_1 \leqslant x < c_2 \\ S_1 + S_2 & \text{si} \quad c_2 \leqslant x < c_3 \\ \dots\dots\dots & \\ S_1 + \dots + S_p & \text{si} \quad c_{p-1} \leqslant x < c_p \end{cases}$$

La función $\Phi(x) = \varphi(x) - \Psi(x)$ queda reducida a una constante, por lo que será derivable en $[a,b]$ y se tendrá:

$$\int_a^b f(x).d\varphi(x) = \int_a^b f(x).d\Phi(x) + \int_a^b f(x).d\Psi(x) = \int_a^b f(x).d\Psi(x) = \sum_{k=1}^{p} f(x_k).S_k$$

ya que la última integral se reduce al sumatorio al ser nulas las diferencias -- $\Psi(x_i) - \Psi(x_{i-1})$ cuando los puntos x_i y x_{i-1} están comprendidos entre dos sucesivos de discontinuidad c_{i-1}, c_i.

Si $\varphi(x)$ no es función escalonada pero tiene un número p finito de puntos de discontinuidad de primera especie $c_1, c_2, \ldots, c_p$, con saltos $S_1, S_2 \ldots, S_p$ en dichos puntos, podremos demostrar una fórmula análoga. Para ello construimos igual que antes la función $\Psi(x)$.

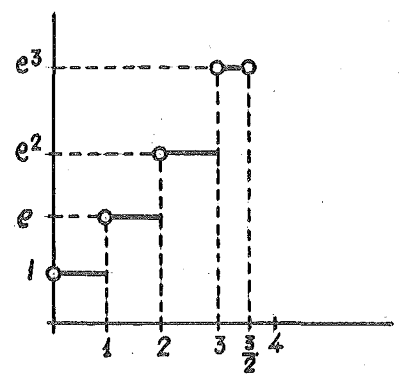
La función $\Phi(x) = \varphi(x) - \Psi(x)$ es también continua. Si además es derivable y con derivada continua en $[a,b]$, tendremos:

$$\int_a^b f(x).d\varphi(x) = \int_a^b f(x).d\Phi(x) + \int_a^b f(x).d\Psi(x) = \int_a^b f(x).\Phi'(x).\ dx + \sum_{k=1}^{p} f(c_k)S_k$$

por los mismos motivos que antes se expusieron anteriormente.

5.- Ejemplos.-

5.1.- Calcular la integral según Riemann-Stieltjes de la función $f(x) = x^2$, respecto de la función de distribución $\varphi(x) = e^{E(x)}$, siendo $E(x)$ la función parte entera de x, en el intervalo $[0, 7/2]$.



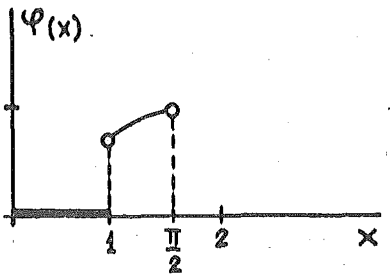
La función $\varphi(x)$ es escalonada, con saltos en los puntos 0, 1, 2 y 3, de valor:

$$S_0 = \varphi(0+) - \varphi(0) = 1-1 = 0$$
$$S_1 = \varphi(1+) - \varphi(1-) = e - 1$$
$$S_2 = \varphi(2+) - \varphi(2-) = e^2 - e$$
$$S_3 = \varphi(3+) - \varphi(3-) = e^3 - e^2$$

$$\int_0^{7/2} x^2 . d[e^{E(x)}] = \sum_{k=0}^{3} f(x_k).S_k = f(0).\ S_0 + f(1).\ S_1 + f(2)\ .\ S_2 + f(3)\ .\ S_3 =$$

$$=(e-1).1 +(e^2-e).4+(e^3-e^2).9=9e^3-5e^2-3e-1$$

3.2.- Calcular la integral según Riemann-Stieltjes de la función $f(x) = x$ respecto de la función de distribución $\varphi(x) = E(x).\text{sen } x$, siendo $E(x)$ la parte entera de x, en el intervalo $[0, \pi/2]$.



La función $\varphi(x)$ tiene en el punto $x = 1$, un salto de valor $S_1 = \varphi(1+) - \varphi(1-) = \text{sen } 1 - 0 = \text{sen } 1$.

$$\Phi(x) = \text{sen } x - \text{sen } 1$$

$$\int_0^{\pi/2} x.d[E(x).\text{sen } x] = \int_0^1 0 + \int_1^{\pi/2} x.d(\text{sen } x - \text{sen } 1) + f(1)\ .\ S_1 =$$

$$=\int_1^{\pi/2} x.\cos x\, dx + \text{sen } 1 = [x.\text{sen } x]_1^{\pi/2} - \int_1^{\pi/2} \text{sen} x\, dx + \text{sen } 1 = \frac{\pi}{2} -$$

$$- \text{sen } 1 +(0 - \cos 1) + \text{sen } 1 = \frac{\pi}{2} - \cos 1$$

2

Integrales dependientes de un parámetro

LECCION 2

INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARAMETRO

1.- Integrales dependientes de un parámetro.-

Son numerosos los casos prácticos en los que aparecen integrales con uno o varios parámetros que figuran en la función subintegral e incluso en los límites de integración, y que no pueden expresarse mediante las funciones elementales conocidas. Así se definen numerosas funciones mediante este tipo de integrales, siendo de gran utilidad en muchas aplicaciones. Por ello es necesario estudiarlas y por lo tanto se precisa analizar su continuidad y derivabilidad, como a continuación se expresa.

2.- Continuidad.-

Si la función $f(x.y)$ es continua en el rectángulo de variación de x e y, $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, la $\int_a^b f(x.y)dy$ es una función continua de y, en el intervalo $[c,d]$.

Escribamos el incremento de la función $F(y) = \int_a^b f(x.y)dx$

$$\Delta F(y) = F(y+\Delta y) - F(y) = \int_a^b f(x, y+\Delta y)dx - \int_a^b f(x.y)\, dx$$

Por ser $f(x.y)$ continua en un intervalo cerrado, será uniformemente continua en él, luego dado un $\varepsilon > 0$, se podrá hallar un valor δ tal que para cualquier par de puntos $p_1(x_1, y_1)$, $p_2(x_2, y_2)$ que difieran menos de δ, se tendrá: $|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon$. Luego elegidos dos puntos (x, y), $(x, y+\Delta y)$, se tendrá: $|f(x, y+\Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon$, siendo $|\Delta y| < \delta$.

Luego quedará:

$$|\Delta F(y)| = \left|\int_a^b f(x.y+\Delta y)dx - \int_a^b f(x.y)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x,y+\Delta y) - f(x.y)|\, dx < \varepsilon \int_a^b dx = \varepsilon.(b-a)$$

luego la función $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ es continua.

La continuidad permite permutar el signo $\int$ con el paso al límite, por lo que se podrá poner:

$$\lim_{y \to \beta} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \lim_{y \to \beta} f(x. y)dx = \int_a^b f(x. \beta)\, dx$$

3.- Derivada de la integral.-

Si la función f(x. y) es derivable respecto de y, y tanto la función f(x. y) como la derivada $\partial f / \partial y$ son continuas en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, la integral $F(y) = \int_a^b f(x. y)dx$ admite derivada respecto de y que se obtiene derivando la función subintegral respecto de y.

Para ello aplicamos la definición de derivada:

$$F'_y(y) = \frac{\partial F}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y+ \Delta y) - F(y)}{\Delta\, y} \tag{1}$$

Escribamos aparte el numerador y apliquémosle el teorema del valor medio:

$$F(y+\Delta y) - F(y) = \int_a^b f(x. y+\Delta y)dx - \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b [f(x, y+\Delta y) - f(x. y)]dx =$$

$$= \Delta y. \int_a^b f'_y (x, y+ \vartheta\,.\, \Delta\, y).\, dx$$

donde $0 < \vartheta < 1$. Sustituyendo en (1), queda:

$$F'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y \int_a^b f'_y(x, y + \vartheta. \Delta y).dx}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b f'_y (x, y + \vartheta. \Delta y)\, dx =$$

$$= \int_a^b \lim_{\Delta y \to 0} f'_y(x, y + \vartheta. \Delta y)dx = \int_a^b f'_y (x, y)dx$$

de acuerdo con la continuidad de f'_y. Esta fórmula se llama fórmula de Leibnitz.

Veamos ahora el caso de que los límites de integración a y b sean función derivables de y. La integral será ahora función de a, b, y, o sea una función compuesta de y.

$$F(a, b, y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx$$

Aplicando la regla de derivación de una función compuesta, se podrá poner:

$$\frac{d}{dy} F(a,b,y) = \frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial a} \cdot \frac{da}{dy} + \frac{\partial F}{\partial b} \cdot \frac{db}{dy} \qquad (2)$$

Para calcular el primer sumando $\partial F/\partial y$, se suponen a y b constantes, luego es el mismo valor calculado antes por la fórmula de Leibnitz, o sea:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^b f'_y(x,y)dx \qquad (3)$$

Para calcular el tercer sumando, recordemos el teorema fundamental del cálculo integral que expresa la variación de una integral definida al variar el límite superior y que para funciones continuas permite escribir:

$$\frac{d}{dx} F(X) = \frac{d}{dx}\int_a^X f(x)dx = f(X)$$

Aplicándolo a nuestro caso X = b, se tendrá:

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x,y)dx = f(b,y) \qquad (4)$$

Para calcular el segundo sumando, podemos aplicar la fórmula (2), cambiando los límites de integración:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x,y)dx = \frac{\partial}{\partial a}\int_b^a f(x,y)dx = - f(a,y) \qquad (5)$$

Sustituyendo (3), (4) y (5) en (2), queda:

$$\frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} dx + f(b,y) . \frac{db}{dy} - f(a,y) . \frac{da}{dy}$$

4.- <u>Límite uniforme de una suma</u>.-

Si la función f(x, y) es una función continua de x e y en el rectángulo de variación $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, la suma $\Sigma f(\xi_i, y).\Delta x_i$ tiende uniformemente a la integral $\int_a^b f(x,y)dx$, en el intervalo $[a,b]$, o sea dado un valor $\varepsilon > 0$, se podrá hallar un δ tal que para todo sistema de particiones cuyos intervalos verifiquen $\Delta x_i < \delta$, se tendrá:

$$\left| \Sigma f(\xi_i, y)\Delta x_i - \int_a^b f(x,y)dx \right| < \varepsilon \ ; \quad x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_i + \Delta x_i$$

cualquiera que sea y perteneciente al intervalo $[c,d]$.

Para demostrarlo, sean M_i y m_i el máximo y el mínimo absoluto de $f(x,y)$ entre $f(x_i, y)$ y $f(x_i + \Delta x_i, y)$.

$$s = \Sigma m_i \Delta x_i < \int_a^b f(x,y)dx < \Sigma M_i \Delta x_i = S$$

$$s = \Sigma m_i \Delta x_i < \Sigma f(\xi_i, y)\Delta x_i < \Sigma M_i \Delta x_i = S$$

la diferencia verificará:

$$\left| \int_a^b f(x,y)dx - \Sigma f(\xi_i, y).\Delta x_i \right| < S - s = \Sigma (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \Sigma \Delta x_i = \varepsilon$$

Ya que $f(x,y)$ es uniformemente continua en el rectángulo dado, y por tanto la oscilación $M_i - m_i$ se podrá hacer menor que $\varepsilon/b-a$ en todo el rectángulo, con independencia de y, tomando $\Delta x_i < \delta$.

Esta propiedad se utiliza para el cálculo de integrales dobles y triples.

Se puede generalizar para funciones $f(x,y)$ acotadas y con un número finito de puntos de discontinuidad.

Asimismo, se puede generalizar para integrales dependientes de dos parámetros $\int_a^b f(x,y,z)dx$, exigiendo a $f(x,y,z)$ las mismas condiciones iniciales de continuidad en el paralelepípedo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$; $e \leqslant z \leqslant f$.

5.- Intervalos infinitos.-

Vamos a generalizar los resultados anteriores a integrales de intervalo infinito: $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$. Esta integral impropia tiene un campo de existencia al variar y, que supondremos es el intervalo $c \leqslant y \leqslant d$.

Se dice que la integral es uniformemente convergente en dicho intervalo, si dado un número $\varepsilon > 0$, se puede hallar un valor A tal que $\left| \int_a^\infty f(x,y)\,dx \right.$ -

$- \int_a^A f(x,y)dx \Big| < \varepsilon$, cualquiera que sea el valor de y del intervalo $[c, d]$.

Vamos a demostrar que si $f(x, y)$ es continua para $x \geqslant a$, $c \leqslant y \leqslant d$, y la integral es uniformemente convergente, la función $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ es continua en $[c, d]$.

Para demostrarlo, escribamos el incremento de la función:

$$\Delta F(y) = F(y+\Delta y) - F(y) = \int_a^\infty F(x, y+\Delta y)dx - \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^A f(x. y+\Delta y)\, dx -$$

$$- \int_a^A f(x,y)dx + \int_A^\infty f(x, y+\Delta y)dx - \int_A^\infty f(x,y)dx$$

El valor absoluto se podrá acotar así:

$$|\Delta F(y)| = |F(y+\Delta y) - F(y)| \leqslant \left| \int_a^A [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]\, dx \right| +$$

$$+ \left| \int_A^\infty f(x, y+\Delta y)dx \right| + \left| \int_A^\infty f(x,y)dx \right| \qquad (1)$$

Por la convergencia uniforme de la integral, se puede encontrar un A tal que los dos últimos sumandos sean menores que ε. Fijado un valor A, el primer sumando se puede acotar así:

$$\int_a^A |f(x, y+\Delta y) - f(x,y)|\, dx < \int_a^A \varepsilon \,.\, dx = \varepsilon(A-a)$$

Sustituyendo en (1), queda:

$$|\Delta F(y)| < \varepsilon\,(A-a) + 2\varepsilon$$

Por lo que se puede hacer tan pequeño como se quiera, luego la función $F(y)$ es continua para cualquier valor de y perteneciente al intervalo $[c, d]$, y por lo tanto se cumple la permutabilidad del signo $\int$ con el paso al límite en y.

La fórmula de Leibnitz para la derivación bajo el signo integral es por lo tanto válida, si es uniformemente convergente la integral de la derivada -- $\int_a^\infty f'_y \,.\, dx$.

6.- Ejemplos.-

6.1.- Calcular:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \cdot \operatorname{sen} ax}{x} \, dx$$

Para resolverla, derivamos respecto del parámetro a:

$$\frac{dI}{da} = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot \cos ax.dx = \frac{1}{1+a^2}$$

Integrando queda:

$$I(a) = \int \frac{da}{1+a^2} = \operatorname{arctg} a + C$$

Es necesario determinar C unívocamente ya que I es una integral definida. Para ello damos al parámetro a algún valor sencillo, por ejemplo a = 0, y queda:

$$I(0) = \operatorname{arctg} 0 + C = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{0.dx}{x} = 0 \Longrightarrow C = 0$$

luego: $I = \operatorname{arctg} a$.

6.2.- Calcular:

$$I(a) = \int_0^{\infty} L\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right).Lx.dx$$

$$I'(a) = \int_0^{\infty} \frac{2a/x^2}{1+\frac{a^2}{x^2}} Lx.dx = \int_0^{\infty} \frac{2a}{a^2+x^2} Lx.dx$$

hacemos el cambio $x = a.\operatorname{tg} t$; $dx = a(1+\operatorname{tg}^2 t)dt$

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{2a}{a^2+a^2\operatorname{tg}^2 t}.L(a.\operatorname{tg} t) \cdot a(1+\operatorname{tg}^2 t).dt = 2\int_0^{\pi/2} L(a \cdot \operatorname{tg} t).dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} La.dt + 2\int_0^{\pi/2} L\operatorname{tg} t.dt = 2.La.\frac{\pi}{2} + 2\int_0^{\pi/2} L\operatorname{sen} t\, dt - 2\int_0^{\pi/2} L\cos t\, dt =$$

haciendo en la última integral el cambio: $t = \frac{\pi}{2} - z$.

$$I'(a) = \pi . La + 2 \int_0^{\pi/2} L \text{ sen } tdt + 2 \int_{\pi/2}^{0} L\cos(\frac{\pi}{2} - z)dz = \pi La$$

Luego quedará, integrando respecto de a:

$$I(a) = \int \pi La \cdot da = \pi [a . La - \int a . \frac{1}{a} \cdot da] = \pi a (La - 1) + k \qquad (1)$$

para determinar la constante k, hacemos a = 0 y sustituimos en el enunciado y en (1), obteniendo:

$$I(0) = \int_0^{\infty} L1 . Lx \cdot dx = 0 = \lim_{a \to 0} [\pi a(La - 1) + k] = 0 + k = k$$

luego k = 0, sustituyendo en (1) queda definitivamente:

$$\underline{I(a) = \pi a(La - 1)}$$

6.3.- Calcular:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x \, . \, dx}{(a^2 - b^2 \text{ sen}^2 x)^2}, \quad \text{siendo } a > b$$

Partimos de la integral:

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 - b^2 \text{sen}^2 x}$$

hagamos en ésta el cambio tg x = t; sen x = $t/\sqrt{1+t^2}$; dx = $dt/1 + t^2$.

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{dt/1 + t^2}{a^2 - b^2 \frac{t^2}{1+t^2}} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(a^2 - b^2)t^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a \sqrt{a^2 - b^2}}$$

Derivando respecto de b:

$$I'_b(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{2b . \text{sen}^2 x}{(a^2 - b^2 \text{sen}^2 x)^2} = \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)^3}} \cdot b$$

luego:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(a^2-b^2\operatorname{sen}^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}} \qquad (1)$$

Por otro lado derivamos I(a,b) respecto de a y se obtiene:

$$I'_a(a,b) = -\int_0^{\pi/2} \frac{2a\ dx}{(a^2-b^2\operatorname{sen}^2 x)^2} = \frac{\pi}{2}\ \frac{-\sqrt{a^2-b^2} - a.\dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}}{a^2(a^2-b^2)}$$

luego:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2-b^2\operatorname{sen}^2 x)^2} = \frac{\pi(2a^2-b^2)}{4a^3(a^2-b^2)^{3/2}} \qquad (2)$$

sustituyendo (1) y (2) en I quedará:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\ dx}{(a^2-b^2\operatorname{sen}^2 x)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{(a^2-b^2\operatorname{sen}^2 x)^2}\, dx =$$

$$= \frac{\pi\ (2a^2-b^2)}{4a^3(a^2-b^2)^{3/2}} - \frac{\pi\ a^2}{4a^3(a^2-b^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{4a^3\sqrt{a^2-b^2}}$$

6.4.- Calcular:

$$I(a) = \int_0^{\pi/4a} \frac{x^2 .\operatorname{sen} ax}{\cos^3 ax}\, dx, \text{ partiendo de la integral } \int_0^{\pi/4a} tg(at)dt = \frac{1}{2a}.L2$$

y utilizando las fórmulas de derivación bajo el signo integral.

$$\int_0^{\pi/4a} tg\ ax = \frac{L2}{2a}, \text{ derivando respecto de a.}$$

$$\int_0^{\pi/4a} \frac{x}{\cos^2 ax}\, dx - \frac{\pi}{4a^2} . tg(a . \frac{\pi}{4a}) = -\frac{2L2}{4a^2}$$

$$\int_0^{\pi/4a} \frac{x}{\cos^2 ax}\, dx = \frac{\pi-2L2}{4a^2}, \text{ derivando otra vez queda:}$$

$$2\int_0^{\pi/4a} \frac{x^2 \operatorname{sen} ax}{\cos^3 ax}\,dx - \frac{\pi}{4a^2}\,\frac{\pi/4a}{\cos^2(a\,\frac{\pi}{4a})} = \frac{2L2 - \pi}{2a^3}$$

de donde operando se obtiene:

$$\int_0^{\pi/4a} \frac{x^2 \operatorname{sen}\ ax}{\cos^3\ ax}\,dx = \frac{\pi^2 + 4(2L2 - \pi)}{16\ a^3}$$

3

Funciones definidas por medio de integrales

LECCION 3

FUNCIONES DEFINIDAS POR MEDIO DE INTEGRALES

1.- Conceptos generales.-

El concepto de integral definida ofrece la posibilidad de definir nuevas funciones trascendentes; caso particular lo ofrecen las funciones f(x) cuya primitiva no pueda expresarse mediante las funciones elementales. Podemos estudiar la variación de dicha integral, definiendo una función cuya variable independiente sea el límite superior de dicha integral y dando al límite inferior un valor constante (ó al revés):

$$F(x) = \int_a^x f(t).dt$$

Otra forma de definir funciones trascendentes lo constituyen las integrales paramétricas, considerando los parámetros como las variables independientes de dichas funciones, pudiendo los límites ser constantes ó bien funciones de los parámetros:

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)dt$$

Las funciones así definidas, más corrientes en la práctica se encuentran tabuladas en numerosos formularios y libros.

Se debe recomendar el libro "Tables of Functions" de Jahnke y Emde, en donde se encuentran muchas funciones importantes tabuladas, así como las representaciones gráficas de las mismas.

A continuación vamos a desarrollar algunas de las funciones así definidas más importantes en Telecomunicación.

2.- Función factorial $\Gamma(p)$.-

Esta función se llama también función euleriana de segunda especie ó función factorial y se define por la fórmula de Gauss.

$$\Gamma(p) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! \; n^p}{p(p+1)\;(p+2)\;\ldots\;(p+n)} \tag{1}$$

Esta función se hace infinita para los valores de p enteros y negativos (incluyendo p = 0).

Cuando p > 0, se puede definir la función factorial por la siguiente integral definida:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} . e^{-x} . dx \qquad (2)$$

Para demostrarlo, calculemos previamente la integral:

$$I = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n . t^{p-1} . dt$$

efectuamos el cambio de variable: $\frac{t}{n} = z$; $dt = n.dz$.

$$I = n^p \int_0^1 (1-z)^n . z^{p-1} . dz$$

integrando por partes queda (siendo n > 0 y z > 0):

$$I = n^p \left[\left| \frac{(1-z)^n z^p}{p} \right|_0^1 + \frac{n}{p} \int_0^1 (1-z)^{n-1} . z^p . dz \right] =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I = n^p . \frac{n}{p} \int_0^1 (1-z)^{n-1} . z^p . dz \text{ del mismo modo:} \\ \int_0^1 (1-z)^{n-1} . z^p . dz = \frac{n-1}{p+1} \int_0^1 z^{p+1} . (1-z)^{n-2} dz \\ \int_0^1 z^{p+1} (1-z)^{n-2} . dz = \frac{n-2}{p+2} \int_0^1 z^{p+2} . (1-z)^{n-3} . dz \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_0^1 z^{n+p-2} (1-z) dz = \frac{1}{n+p-1} \int_0^1 z^{n+p-1} . dz = \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \end{array} \right.$$

Multiplicando miembro a miembro las igualdades anteriores y simplificando, queda:

$$I = n^p \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{p.(p+1)(p+2)\ \dots\ (p+n-1)(p+n)} = \frac{n^p\ .\ n!}{p\cdot(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)(p+n)}$$

Tomando límites para $n \to \infty$ queda:

$$\lim_{n\to\infty} I = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p\ .\ n!}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)} = \int_0^\infty e^{-t}\ .\ t^{p-1}\ .\ dt$$

o sea:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\ .\ e^{-x}\ .\ dx, \text{ cuando } p > 0$$

A esta última integral se le llama integral euleriana de segunda especie.

Otra definición de la función $\Gamma(p)$ que damos sin demostrar es la siguiente (debida a Weierstrass):

$$\frac{1}{\Gamma(p)} = p\ .\ e^{\gamma p}\ .\ \prod_{n=1}^{\infty} [\ (1+\frac{p}{n})\ .\ e^{-\frac{p}{n}}\ ]$$

siendo γ la constante de Euler de valor aproximado $\gamma = 0,577215\dots$

Otras definiciones son las siguientes:

$$\Gamma(p) = \int_0^1 (L\ \frac{1}{x})^{p-1}\ .\ dx \text{ (mediante el cambio } y = e^{-x})$$

$$\Gamma(\frac{1}{p}) = p \int_0^\infty e^{-x^p}\ .\ dx$$

2.1.- <u>Convergencia de la integral euleriana de segunda especie.</u>-

Vamos a estudiar la convergencia de la integral:

$$I = \int_0^\infty x^{p-1}\ .\ e^{-x}\ .\ dx$$

La función subintegral se hace infinita en el origen si $p < 1$; por ello, hay que estudiar su convergencia no sólo en el infinito sino también en el origen. Para ello la descomponemos en dos integrales en los intervalos $[0, 1]$ y $[1, \infty]$

$$\int_0^\infty x^{p-1}.e^{-x}.dx = \int_0^1 x^{p-1}.e^{-x}.dx + \int_1^\infty x^{p-1}.e^{-x}.dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-x} \, . \, dx}{x^{1-p}} + \int_1^\infty \frac{e^{-x} \, . \, x^{n+p-1}}{x^n} dx$$

En la primera integral, la función e^{-x} está acotada en $[0,1]$, $1 \geqslant e^{-x} \geqslant e^{-1}$, luego es convergente si $1-p < 1$, ó sea $p > 0$, y es divergente si $1-p \geqslant 1$, ó sea $p \leqslant 0$.

En la segunda integral, habiendo multiplicado y dividido por x^n, cualquiera que sea $n > 1$, la función $e^{-x} \, . \, x^{n+p-1}$ está acotada en $[1, \infty]$ si es $p > 0$, luego en este caso la integral será convergente.

Queda pues que la integral I es convergente sólo cuando $p > 0$, y es divergente si $p \leqslant 0$. Recuérdese que la igualdad:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} . e^{-x} . dx$$

sólo se definió cuando era $p > 0$.

2.2.- Cálculo recurrente de $\Gamma(p)$.-

Integrando por partes queda:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} . e^{-x} . dx = [-x^{p-1} . e^{-x}]_0^\infty + (p-1) \int_0^\infty x^{p-2} . e^{-x} . dx$$

Cuando $p > 1$, el primer sumando se anula y se obtiene:

$$\Gamma(p) = (p-1) \, . \, \Gamma(p-1)$$

Del mismo modo podemos demostrar la fórmula anterior partiendo de la definición de Gauss:

$$\Gamma(p+1) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{p+1} \, . \, n!}{(p+1)(p+2) \dots (p+n+1)}$$

$$\Gamma(p) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^p \, . \, n!}{p . (p+1) \dots (p+n)}$$

luego:

$$\Gamma(p+1) = \Gamma(p) \, . \lim_{n \to \infty} \frac{np}{p+n+1} = p \, . \, \Gamma(p) \qquad (1)$$

Aplicando reiteradamente la fórmula (1), suponiendo que p es un número entero, se obtiene:

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\ldots 2.1.\Gamma(1)$$

Como $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}.dx = 1$, queda:

$$\Gamma(p) = (p-1)!$$

Por esta fórmula se denomina a la función Γ también "función factorial".

Si p no es entero, por ejemplo $p = n + r$ (siendo n entero y $0 < r < 1$) quedará:

$$\Gamma(p) = \Gamma(n+r) = (p-1).(p-2)\ldots(p-n).\Gamma(r)$$

Para calcular la función Γ bastará pues tenerla tabulada entre 0 y 1, aun que por ser $\Gamma(0) = \infty$, se prefiere construir las tablas entre 1 y 2, y utilizar la fórmula:

$$\Gamma(p) = (p-1).(p-2)\ldots(2+r)(1+r).\ \Gamma(1+r)$$

Otra relación útil que reduce la extensión de las tablas a la mitad es la siguiente:

$$\Gamma(p)\ .\ \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$$

3.- <u>Función Beta</u>.-

Se designa como $\beta(p.q)$ (beta de p y q), o integral euleriana de primera especie a la siguiente integral binomia:

$$\beta(p.q) = \int_0^1 x^{p-1}.(1-x)^{q-1}.dx$$

Vamos a estudiar la convergencia de esta integral, para ello descompone mos la integral de la siguiente forma:

$$\int_0^1 x^{p-1}.(1-x)^{q-1}dx = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}\ (1-x)^{q-1}\ dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}\ dx + \int_{1/2}^1 \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}\ dx$$

En la primera integral, la función del numerador está acotada superior e inferiormente en el intervalo $[0, 1/2]$, luego:

si $1 - p \geqslant 1$; $p \leqslant 0$ divergente

si $1 - p < 1$; $p > 0$ convergente

En la segunda integral, la función del numerador x^{p-1} está acotada superior e inferiormente en el intervalo $[1/2, 1]$, luego:

si $1 - q \geqslant 1$; $q \leqslant 0$ divergente

si $1 - q < 1$; $q > 0$ convergente

Luego la $\beta(p.q)$ es convergente si $p > 0$ y $q > 0$ y divergente en cualquier otro caso.

3.1.- Propiedades de la función $\beta(p.q)$.-

a) Simetría.-

Efectuamos el cambio de variable $x = 1-y$ y queda:

$$\beta(p.q) = \int_0^1 y^{q-1}.(1-y)^{p-1}\,dy = \beta(q.p)$$

b) Reducción.-

Integrando $\beta(p,q)$ por partes se obtiene:

$$\beta(p,q) = \left[\frac{(1-x)^{q-1}.x^p}{p}\right]_0^1 + \frac{q-1}{p} . \int_0^1 x^p.(1-x)^{q-2}dx = \frac{q-1}{p}\,\beta(p+1,\ q-1)$$

Si q es entero, aplicando reiteradamente la fórmula anterior, se obtiene:

$$\beta(p,q) = \frac{(q-1).(q-2)\ldots 2.1}{p(p+1)\ldots(p+q-3)(p+q-2)} \cdot \beta(p+q-1,\ 1)$$

pero $\beta(p.1) = \int_0^1 x^{p-1}dx = 1/p.$

luego:

$$\beta(p+q-1, 1) = \frac{1}{p+q-1}$$

quedando definitivamente:

$$\beta(p,q) = \frac{(q-1)(q-2)\ldots 2.1}{p(p+1)\ldots(p+q-2)(p+q-1)}$$

De modo análogo, si p hubiese sido entero, habríamos obtenido:

$$\beta(p,q) = \frac{(p-1)(p-2)\ldots 2.\ 1}{q(q+1)\ldots(q+p-2)(q+p-1)}$$

c) Relación con la función Γ.

Si q es entero, se ha demostrado la fórmula:

$$\beta(p,q) = \frac{(q-1)(q-2)\ldots 2.1}{p(p+1)\ \ldots\ (p+q-1)}$$

si p también es entero, multiplicando y dividiendo por $\Gamma(p)$ queda:

$$\beta(p,q) = \frac{(q-1)!\ \ \Gamma(p)}{p(p+1)\ldots(p+q-1).1.2\ldots(p-1)} = \frac{\Gamma(p)\ .\ \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Esta fórmula relaciona la función β con la función Γ y aunque se ha demostrado sólo para valores enteros de p y q, se podrá demostrar más adelante su validez para cualquier valor de p y q positivo.

d) Otra expresión de la función β.

Si en la definición efectuamos el cambio de variable $x = \operatorname{sen}^2\vartheta$, $dx = 2\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta$, se obtiene:

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1}\vartheta\ .\cos^{2q-1}\vartheta\ .\ d\vartheta$$

Esta expresión permite calcular la integral siguiente, para cualquier valor de p y q positivo:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1}\vartheta\ .\cos^{2q-1}\vartheta\ .d\vartheta = \frac{1}{2}\ .\beta(p,q)$$

Haciendo $p = q = \frac{1}{2}$, se obtiene:

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\pi/2} d\vartheta = \pi$$

Por la relación con la función Γ podemos escribir:

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = [\,\Gamma(\tfrac{1}{2})\,]^2 = \pi \text{ y resulta } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Si hacemos en la integral euleriana de segunda especie el cambio $x = y^2$, $dx = 2y\, dy$, quedaría:

$$\Gamma(p) = 2 \int_0^{\infty} y^{2p-1} . e^{-y^2} . dy$$

en particular:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} . dy = \sqrt{\pi}$$

De aquí podríamos obtener el valor de la integral de las probabilidades

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} . dy = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

4.- Integrales de Fresnel.-

Se llaman así a las siguientes integrales:

$$A = \int_0^{\infty} \cos x^2 \, dx, \qquad B = \int_0^{\infty} \operatorname{sen} x^2 \, dx$$

Para calcularlas procedemos de la siguiente forma:

$$A - Bj = \int_0^{\infty} (\cos x^2 - j \operatorname{sen} x^2) dx = \int_0^{\infty} e^{-jx^2} . dx$$

efectuamos el cambio $\sqrt{j}\, x = t$; $dx = \frac{1}{\sqrt{j}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} (1-j) dt$

$$A - Bj = \int_0^{\infty} e^{-t^2} . \frac{1}{\sqrt{2}} . (1-j) dt = \frac{1-j}{\sqrt{2}} . \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1-j}{\sqrt{2}} . \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

de donde queda $A = B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Sin embargo la validez de las transformaciones efectuadas requiere el estudio de la integral en el campo complejo.

Vamos a calcularlas por otro procedimiento que requiere el conocimiento de las integrales dobles por lo que no se debe estudiar hasta no conocer el concepto de integral doble.

Vamos previamente a demostrar la siguiente fórmula:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos\frac{p\pi}{2}}\ , \quad 0 < p < 1 \qquad (1)$$

Partimos de la función Γ efectuando el cambio de variable $y = ux$.

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty y^{p-1}.e^{-y}dy = x^p . \int_0^\infty u^{p-1} . e^{-ux} . du$$

$$\frac{1}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty u^{p-1}.e^{-xu} . du$$

multiplicamos los dos miembros por cos x. dx, e integramos en $[0,\infty]$.

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}\,dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty [\int_0^\infty u^{p-1}.e^{-ux}.du] \cos x.dx$$

cambiando el orden de integración queda:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}\,dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty u^{p-1}.du \int_0^\infty e^{-ux} \cos x\, dx = \frac{1}{\Gamma(p)} . \int_0^\infty \frac{u^p}{1+u^2}\,du$$

Efectuamos el cambio de variable $1 + u^2 = \frac{u^2}{t}$

$u^2 = \frac{t}{1-t}$; $u = \frac{t^{1/2}}{(1-t)^{1/2}}$ y la integral se transforma en:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}\,dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 t^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}.(1-t)^{-\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2} . \beta\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{p}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{\Gamma(\frac{p}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{p}{2})}{\Gamma(1)} = \frac{-1}{2} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}-\frac{p}{2})\pi} = \frac{\pi}{2\cos\frac{p\pi}{2}}$$

En la primera integral de Fresnel efectuamos el cambio $x^2 = y$, y aplicamos la fórmula demostrada (1).

$$A = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos y}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{2} [\frac{\pi}{2\Gamma(\frac{1}{2}) . \cos\frac{\pi}{4}}] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Del mismo modo calcularíamos B .

5.- Otras funciones definidas por integrales.-

Ejemplos notables de funciones mu importantes son los siguientes:

a) Función seno integral.

$$S_i(x) = \int_0^x \frac{\text{sen } t}{t}\, dt$$

Su valor en $x = \infty$ es: $S_i(\infty) = \int_0^\infty \frac{\text{sen } t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

A veces se define la función seno integral por la siguiente fórmula, ligeramente distinta de la anterior:

$$s_i(x) = -\int_x^\infty \frac{\text{sen } t}{t}\, dt$$

Estas dos definiciones se pueden relacionar así:

$$S_i(x) - s_i(x) = \int_0^x \frac{\text{sen } t}{t}\, dt + \int_x^\infty \frac{\text{sen } t}{t}\, dt = \int_0^\infty \frac{\text{sen } t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

b) Función coseno integral.

$$C_i(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt$$

Esta definición sólo es válida para $x > 0$.

c) Función de error.

$$\vartheta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} . dt$$

Esta función aparece muy frecuentemente en estadística y cálculo de probabilidades, así como en el cálculo de la propagación de perturbaciones a lo largo de las líneas eléctricas de transmisión. En muchos textos se representa por la notación erf(x).

d) Función $\Pi(x)$.

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$$

representa el área comprendida entre la función de Gauss $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ y el eje de abscisas, situada a la izquierda de la abscisa x. Se relaciona con la función error por la fórmula:

$$\vartheta\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 1 = 2 \cdot \Pi(x)$$

Existen tablas muy completas de la función $\Pi(x)$ que permiten a través de la última fórmula calcular $\vartheta(x)$.

La función de Gauss $\varphi(x)$ tiene la propiedad de ser su propia transformada de Fourier (definición que se verá más adelante), por lo que resulta de gran importancia en el estudio del espectro de las señales y de los diagramas direccionales de las antenas radioeléctricas.

e) Función complementaria de error.

$$f(x) = 1 - \vartheta(x)$$

$$f(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} \cdot dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \cdot dt$$

En muchos libros se representa por erfc(x).

f) Función logaritmo integral.

$$L_i(x) = \int_0^x \frac{dt}{Lt}$$

g) Función exponencial integral.

$$E_i(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} \cdot dt$$

Se relaciona con la anterior por la expresión:

$$E_i(x) = L_i(e^x)$$

h) Funciones elípticas.

Surgen del estudio de las integrales elípticas que como se recordará son de la forma $\int R(x, \sqrt{p(x)})dx$, siendo R una función racional y p(x) un polinomio de tercero o cuarto grado; por reducción estas integrales se transformaban entre otros en los siguientes tipos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x}} \quad \text{integral de 1ª especie de Legendre}$$

$$\int \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x}\,.dx \quad \text{integral de 2ª especie de Legendre}$$

A partir de ellas podemos definir las funciones elípticas:

$$F(k,x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 t}}$$

$$E(k,x) = \int_0^x \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 t}\,dt$$

siendo:

$$-1 < k < 1$$

i) Funciones de Fresnel.

En problemas de propagación de ondas aparecen las funciones de Fresnel, que se definen así:

$$C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi u^2}{2}\,.du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos t^2\,.dt$$

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen} \frac{\pi u^2}{2}\,.du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \operatorname{sen} t^2\,dt$$

Su valor para $x = \infty$, se ha calculado anteriormente: $C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

En general, la importancia de todas estas funciones reside en que frecuentemente se pueden expresar soluciones de problemas físicos con términos de ellas.

6.- Ejemplos.-

6.1.- Calcular la integral $\int_0^{\infty} \sqrt{x}\,.\,e^{-x^3}\,.\,dx$

Hacemos el cambio $x^3 = y;\; x = y^{\frac{1}{3}};\; dx = \frac{1}{3}\,y^{-\frac{2}{3}}.dy$

$$I = \int_0^{\infty} \sqrt{y^{1/3}}\,.\,e^{-y}.\,\frac{1}{3}\,.\,y^{-2/3}.dy = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} y^{-1/2}.\,e^{-y}dy = \frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

6.2.- Calcular: $\int_0^{\infty} 3^{-4x^2}\,dx.$

$$I = \int_0^{\infty} (e^{L3})^{-4x^2}.\,dx = \int_0^{\infty} e^{(-4L3)x^2}.\,dx, \text{ hacemos el cambio } (4L3)x^2 = z.$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-z}.\,d(\frac{z^{1/2}}{\sqrt{4L3}}) = \frac{1}{2\sqrt{4L3}}\int_0^{\infty} z^{-1/2}.\,e^{-z}dz = \frac{\Gamma(1/2)}{2\sqrt{4L3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{L3}}$$

6.3.- Calcular:

$$\int_0^{a} x^4\,\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Hacemos $x^2 = a^2y$ y queda:

$$I = a^6\int_0^1 y^{3/2}(1-y)^{1/2}dy = a^6\,.\,\beta(\frac{5}{2},\frac{3}{2}) = a^6\,\frac{\Gamma(5/2).\Gamma(3/2)}{\Gamma(4)} = \frac{\pi a^6}{16}$$

6.4.- Calcular:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\varphi}}$$

Partimos de:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\cos t}} = \int_0^{\pi/2} \cos^{-\frac{1}{2}} t.\,dt = \frac{1}{2}\,.\beta(\frac{1}{4}\;\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\sqrt{\pi}}{2.\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{2.\sqrt{2\pi}}$$

por otro lado hacemos el cambio $\sqrt{2}\,.\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2} = \mathrm{sen}\,\varphi$.

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\cos t}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\cos^2 \frac{t}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}} =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \sqrt{2} \,.\, I, \quad \text{Luego:}$$

$$I = \frac{I_1}{\sqrt{2}} = \frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{4 . \sqrt{\pi}}$$

4

Integral Curvilínea

LECCION 4

INTEGRAL CURVILINEA

1.- Concepto de integral curvilínea.-

Vamos a definir un nuevo concepto de gran interés para el desarrollo de la teoría vectorial de campos y que es el de integral curvilínea.

Por comodidad del razonamiento vamos a exponer dicho concepto para el caso de una función de tres variables aunque podremos extender el mismo posteriormente al espacio n-dimensional.

Así pues, consideremos tres funciones continuas y con derivada continua en el intervalo $[a,b]$ de variación de la variable independiente t.

$$x = x(t) \; ; \; y = y(t) \; ; \; z = z(t) \tag{1}$$

Estas tres funciones representan las ecuaciones paramétricas de un arco de curva C, con tangente, que varía de manera continua en cada uno de sus puntos.

Consideremos también una función $f(x, y, z)$ (2) continua en todos los puntos del arco C, lo que quiere decir que al sustituir x, y, z por sus expresiones (1) resulta una función continua de t en el intervalo $[a,b]$.

Si dividimos el intervalo $[a,b]$ en n partes mediante los puntos:

$$a = t_0, \; t_1, \; t_2, \; \ldots, t_i, \; t_{i+1}, \; \ldots, \; t_n = b \tag{3}$$

se obtiene una descomposición del arco de curva C en n arcos determinados por los puntos.

$$P_0 = A, \; P_1, \; P_2, \; \ldots, \; P_i, \; P_{i+1}, \ldots, P_n = B$$

Formemos la suma:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\,[x(\tau_i), \; y(\tau_i), \; z(\tau_i)]\,[x_{i+1} - x_i] \tag{4}$$

en la que τ_i representa el valor de t correspondiente a un punto cualquiera del arco $\widehat{P_i\,P_{i+1}}$ de la curva C.

Vamos a probar que la suma (4) tiene límite cuando $n \to \infty$ de tal modo -

que tiendan a cero los $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Dicho límite se llama integral curvilínea de la función $f(x, y, z)$ a lo largo del arco AB y se representa por la notación:

$$\int_C f(x, y, z)\ dx \tag{5}$$

Como $x_{i+1} - x_i = \Delta t_i \cdot x'(\tau'_i)$ resulta que (4) se puede poner:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f[x(\tau_i),\ y(\tau_i),\ z(\tau_i)] \cdot x'(\tau'_i)\,\Delta t_i \tag{6}$$

La expresión (6) tiene una estructura muy parecida a la de aquellas sumas cuyo límite conduce a una integral definida. La única diferencia estriba en la presencia de los números τ_i y τ'_i que en general son diferentes.

Pero en virtud de la continuidad uniforme de la función $f(x, y, z)$, se tiene que:

$$f[x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)] = f[x(\tau'_i),\ y(\tau'_i),\ z(\tau'_i)] + \varepsilon_i$$

donde todos los ε_i cumplen $|\varepsilon_i| < \varepsilon$ en cuanto sea $|\tau_i - \tau'_i|$ suficientemente pequeño.

Luego (6) se puede escribir:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f[x(\tau'_i),\ y(\tau'_i),\ z(\tau'_i)]\,x'(\tau'_i)\Delta t_i + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i\ x'(\tau'_i)\,\Delta t_i \tag{7}$$

El primer sumando de (7) tiene como límite:

$$\int_a^b f[x(t),\ y(t),\ z(t)]\ x'(t)\ dt \tag{8}$$

En cuanto al segundo sumando, en valor absoluto es menor que:

$$\varepsilon\ \left|\sum_{i=0}^{n-1} x'(\tau'_i)\,\Delta t_i\right|$$

y puede hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo $\underline{\varepsilon}$ suficientemente pequeño.

Con ello hemos demostrado que la integral curvilínea (5) existe y que su valor se calcula mediante (8), que es una integral definida ordinaria.

Igualmente se definen las integrales curvilíneas de los tipos:

$$\int_C f(x, y, z)\ dy\ ,\ , \quad \int_C f(x, y, z) dz$$

Finalmente son especialmente interesantes para la Física la reunión de integrales de los tres tipos que resulta al considerar un arco de curva C con las condiciones citadas antes y tres funciones

$$X(x, y, z),\ ,\quad Y(x, y, z)\ ,\ ,\quad Z(x, y, z)$$

que cumplan las mismas condiciones de continuidad que la $f(x, y, z)$, y que se representan mediante la notación:

$$\int_C [X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)\ dy + Z(x, y, z)dz]$$

Para integrales curvilíneas planas, se simplifica el estudio hecho, puesto que no existe la variable z, pero las condiciones son válidas.

No presenta, tampoco ninguna dificultad, extender el concepto a un espacio n-dimensional, como se indicó inicialmente.

2.- <u>Cálculo de la integral curvilínea</u>.-

De la definición anterior se desprende el procedimiento de cálculo de las integrales curvilíneas.

Supongamos que queremos calcular:

$$\int_\gamma X(x, y, z).dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz$$

a lo largo del arco de curva γ, definido por las ecuaciones paramétricas.

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

estando los extremos A y B de dicho arco γ, definidos para los valores del parámetro t_0 y t_1 respectivamente y cumpliendo las funciones X, Y, Z, así como las ecuaciones de la curva las condiciones fijadas en el número anterior.

Bastará sustituir en la integral x, y, z y sus diferenciales por sus valores en función de t, y quedará:

$$\int_{\gamma} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz = \int_{t_0}^{t_1} X[x(t),y(t),z(t)].x'(t)dt +$$

$$+Y[x(t),y(t),z(t)].y'(t)dt + Z[x(t),y(t),z(t)].z'(t)dt$$

quedando así pues una integral ordinaria que se calculará por los procedimientos conocidos.

De aquí se desprenden estas dos propiedades:

a) Si tomamos un punto cualquiera M del arco γ comprendido entre sus extremos A y B, se verificará:

$$\int_A^B = \int_A^M + \int_M^B$$

b) Si cambiamos el sentido del recorrido del arco γ, la integral curvilínea cambia de signo.

3.- Concepto de función potencial.-

Puede ocurrir que la función subintegral sea la diferencial exacta de una función $U(x,y,z)$ que llamaremos, cuando exista, función potencial de X, Y, Z.

$$dU \equiv X.dx + Y.dy + Z.dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X, \frac{\partial U}{\partial y} = Y \frac{\partial U}{\partial t} = Z$$

Vamos a demostrar que si existe una función potencial en un dominio espacial, la

$$\int_{A(x_0,y_0,z_0)}^{B(x_1,y_1,z_1)} Xdx + Ydy + Zdz$$

depende sólo de los extremos del arco $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$, siendo independiente de la curva que los une en dicho dominio.

La demostración es sencilla; sean $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ las ecuaciones paramétricas de la curva que une A y B y sean t_0 y t_1 los valores del parámetro correspondientes a los puntos A y B. Sustituyendo en la integral quedará:

$$\int_{A(x_0,y_0,z_0)}^{B(x_1,y_1,z_1)} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z) = \int_{A(x_0,y_0,z_0)}^{B(x_1,y_1,z_1)} dU(x,y,z) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dU[x(t),y(t),z(t)] = \Big| U[x(t),y(t),z(t)] \Big|_{t_0}^{t_1} =$$

$$= U[x(t_1),\ y(t_1),\ z(t_1)] - U[x(t_0),y(t_0),z(t_0)] =$$

$$= U(x_1,\ y_1,\ z_1) - U(x_0,\ y_0,\ z_0) = U_B - U_A$$

Queda pues el valor de la integral como la diferencia entre los valores de la función potencial en los extremos del arco γ, independientemente de la curva que los unía.

El recíproco se puede expresar así: Si las funciones $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ son continuas en un cierto dominio espacial y la integral curvilínea:

$$\int_\gamma Xdx + Ydy + Zdz$$

no depende del arco de curva γ, sino sólo de sus extremos, cualquiera que sean éstos, dentro del mismo dominio, existe una función potencial de X, Y, Z en él.

Para demostrarlo, calculemos la integral curvilínea entre el punto fijo $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ y el variable (x,y,z). Calculemos el incremento que experimenta dicha función al incrementar la abscisa x del extremo en Δx:

$$U = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} X.dx+Y.dy+Z.dz$$

$$\Delta_x U = \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} Xdx+Ydy+Zdz$$

como por hipótesis, es independiente del camino, elegimos un segmento paralelo al eje x, o sea $dy = dz = 0$, y queda:

$$\Delta_x U = \int_x^{x+\Delta x} X(x,y,z)dx = \Delta x . X(\xi,y,z);\quad x \leqslant \xi < x+\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} X(\xi,y,z) = X(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}$$

ya que $X(x,y,z)$ es una función continua.

De modo similar demostraríamos

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z$$

4.- Cálculo de la función potencial. -

Supongamos que las funciones $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ sean continuas, derivables y con derivadas continuas. Vamos a calcular de forma separada la función potencial en el plano y en el espacio.

a) Cálculo de la función potencial en el plano. Supuestas las condiciones anteriores para $X(x-y)$, $Y(x-y)$, es necesario que se verifique la igualdad de las derivadas cruzadas, de acuerdo con el teorema de Schwarz, ya que se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= X(x, y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= Y(x, y) \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \text{ o sea : } \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \qquad (1)$$

Recíprocamente, vamos a demostrar que si se cumple la relación (1), - existe función potencial que vamos a calcular además.

Para ello, planteamos las ecuaciones que definen $U(x, y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X(x, y) \quad (2) \qquad\qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Y(x, y) \quad (3)$$

Integramos (2) respecto de x, considerando y constante, por lo tanto la constante de integración será, en general, una función $\varphi(y)$ que habrá que determinar posteriormente.

$$U = \int X(x, y)dx + \varphi(y) \qquad (4)$$

Derivamos (4) respecto de y, e igualamos con (3),

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int X'_y(x, y)dx + \varphi'(y) = Y(x, y)$$

$\varphi'(y) = Y(x, y) - \int X'_y(x, y)dx$ (5) e integrando respecto de y.

$\varphi(y) = \int [Y - \int X'_y . dx]dy$ sustituyendo en (4) queda:

$$U(x,y) = \int X.dx + \int [Y - \int X'_y.dx].dy$$

Obsérvese que $\varphi(y)$ es una función sólo de y, por lo que a $\varphi'(y)$ le pasará lo mismo. Por lo tanto $\frac{d}{dx}[\varphi'(y)] = 0$. Derivando (5) queda:

$$\frac{d}{dx}[\varphi'(y)] = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0 \quad \text{por hipótesis.}$$

Luego podemos afirmar que la condición necesaria y suficiente para que la expresión $X.dx + Y.dy$ sea diferencial exacta es que las derivadas cruzadas sean iguales.

b) Cálculo de la función potencial en el espacio. Supuestas las condiciones anteriores para $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$, es necesario que se verifique la igualdad de las derivadas cruzadas, de acuerdo con el teorema de Schwarz, ya que se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= X \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= Y \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= Z \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y} \end{aligned}\right| \text{ o sea } \left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial z} &= \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial z} &= \frac{\partial Z}{\partial y} \end{aligned}\right| \qquad (6)$$

Recíprocamente, vamos a demostrar que si se cumplen las tres relaciones (6), existe función potencial que vamos a calcular además. Para ello, planteamos las ecuaciones que definen $U(x,y,z)$.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X \qquad (7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Y \qquad (8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = Z \qquad (9)$$

Integramos la (7) respecto de x, considerando y, z como constantes, por lo que la constante de integración, en general, será una función $\varphi(y,z)$ que habrá que determinar.

$$U = \int X . dx \; + \; \varphi(y, z) \qquad (10)$$

Para hallar $\varphi(y, z)$ derivamos (10) respecto de y, z e igualamos a (8) y (9) respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= \int X'_y . dx + \varphi'_y(y, z) = Y \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= \int X'_z . dx + \varphi'_z(y, z) = Z \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_y(y, z) &= Y - \int X'_y . dx \qquad (11) \\ \varphi'_z(y, z) &= Z - \int X'_z . dx \qquad (12) \end{aligned}\right\}$$

Integramos (11) respecto de y, considerando z constante, por lo tanto habrá que sumarle una constante de integración que será una función sólo de z, - $\Psi(z)$.

$$\varphi(y, z) = \int [Y - \int X'_y . dx] . dy + \Psi(z) \qquad (13)$$

Derivamos (13) respecto de z e igualamos con (12):

$$\varphi'_z(y, z) = \int [Y'_z - \int X''_{yz} . dx] dy + \Psi'(z) = Z - \int X'_z dx$$

de donde :

$$\Psi'(z) = Z - \int X'_z . dx - \int [Y'_z - \int X''_{yz} . dx] dy$$

$$\Psi'(z) = \int \left\{ Z - \int X'_z dx - \int [Y'_z - \int X''_{yz} \, dx] dy \right\} . dz \qquad (14)$$

Sustituyendo (14) en (13) y en (10) queda:

$$U(x, y, z) = \int X . dx + \int [Y - \int X'_y . dx] . dy + \int \left\{ Z - X'_z dx - \int [Y'_z - \int X''_{yz} \, dx] dy \right\} dz$$

Obsérvese que $\varphi'_y(y, z)$ es función sólo de y, z, así como $\varphi'_z(y, z)$ es función sólo de y, z, asímismo $\Psi'(z)$ lo es sólo de z.

Por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\varphi'_y] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}[\varphi'_z] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}[\Psi'(z)] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\Psi'(z)] = 0.$$

Derivando las ecuaciones correspondientes queda:

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$

que se anulan por hipótesis.

Luego podemos afirmar que la condición necesaria y suficiente para que la expresión $X.dx + Y.dy + Z.dz$ sea diferencial exacta es que las derivadas cruzadas (6) sean iguales.

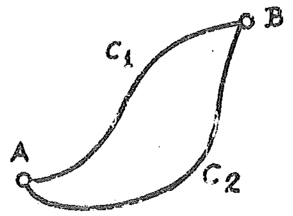
5. - Conclusiones adicionales. -

Vistas las condiciones de existencia de la función potencial, así como el cálculo de la misma, se pueden establecer las siguientes equivalencias, entre estas relaciones:

a) Existencia de la función potencial.

b) Igualdad de las derivadas cruzadas

c) Independencia de la integral del camino recorrido.



Si la integral es independiente del camino, quiere decir, que a lo largo del arco C_1 es igual que a lo largo del arco C_2, o sea:

$$\int_{A(C_1)}^{B} = \int_{A(C_2)}^{B} \quad ó \quad \int_{A(C_1)}^{B} + \int_{B(C_2)}^{A} = 0$$

lo que equivale a afirmar que la integral curvilínea recorrida en un mismo sentido en el contorno cerrado AC_1BC_2A es nula.

O sea la condición necesaria y suficiente para que la integral curvilínea $\int Xdx + Ydy + Zdz$ a lo largo de una curva cerrada sea nula es que sean iguales en el dominio las derivadas cruzadas.

6.- Puntos singulares.-

Consideremos el siguiente ejemplo: Calcular la integral curvilínea:

$$\int_C -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

a lo largo del contorno de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

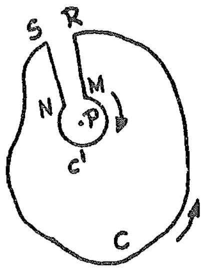
La función subintegral admite función potencial $U(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ y se puede poner:

$$\int_C -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_C d\left[\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right] = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Esta integral no se ha anulado, pese a estar extendida a un contorno cerrado y admitir función potencial, luego está aparentemente en contradicción con los teoremas demostrados anteriormente.

La causa de esta diferencia está en no haber tenido en cuenta las condiciones con las que se establecieron dichos teoremas y que exigirá la existencia y continuidad de X, Y, Z así como de sus derivadas en todos los puntos del dominio considerado.

En este ejemplo, las funciones $X = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Y = \frac{x}{x^2+y^2}$, y sus derivadas no están definidas en el origen. Los puntos que tienen esas características los llamaremos puntos singulares.



Los teoremas precedentes deben pues modificarse en estas condiciones. Para ello, si P es un punto singular se rodea de un entorno C' arbitrariamente pequeño y que suponemos suprimido del dominio encerrado por C.

El contorno cerrado ScRMc' NS no contiene ya ningún punto singular, por lo que al admitir función potencial, la integral curvilínea a lo largo de él se anula.

Podemos escribir:

$$\int_{ScRM_{c'}NS} = 0 = \int_{ScR} + \int_{RM} + \int_{M_{c'}N} + \int_{NS}$$

Tomando límites cuando RS $\to$ 0, se anulará la segunda integral con la cuarta y se podrá escribir:

$$0 = \int_{c\circlearrowleft} + \int_{c'\circlearrowright} \quad ; \quad \int_{c\circlearrowleft} = \int_{c'\circlearrowleft}$$

Para un número finito de puntos P_1, $P_2, \dots, P_k$ efectuaríamos la misma operación con cada uno de ellos, recubriéndolos con entornos C_1, $C_2, \dots C_k$, con lo que podríamos enunciar el teorema anterior de esta forma:

La integral curvilínea a lo largo de dicho contorno cerrado será igual a la suma de las integrales curvilíneas extendidas a los contornos C_1, $C_2, \dots, C_k$.

$$\int_{c\circlearrowleft} = \int_{c_1\circlearrowleft} + \int_{c_2\circlearrowleft} + \dots + \int_{c_k\circlearrowleft}$$

7.- Circulación de un vector.-

El concepto de integral curvilínea tiene una interpretación fisicomatemática de gran utilidad en la teoría vectorial de campos, y que es el de circulación, denominación que proviene de la teoría de fluidos.

Se llama circulación de un campo vectorial V de componentes X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z) a lo largo de una línea C, a la integral curvilínea del producto escalar del vector V por el vector dS de componentes dx, dy, dz, tomado sobre dicha línea, o sea:

$$\text{circulación de V a lo largo de C} = \int_c \overline{V}.\overline{dS} = \int_c X.dx+Y.dy+Z.dz$$

Cuando X, Y, Z sean las componentes de un campo de fuerzas, la inte -

gral es el trabajo de la masa unidad al recorrer la línea.

8.- Ejemplos.-

8.1.- Demostrar que:

$$\frac{adx}{z} - \frac{bdy}{z} + \frac{by-ax}{z^2}$$

es diferencial exacta y hallar la función potencial.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{a}{z^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{b}{z^2}$$

La función potencial $U = U(x, y, z)$ se hallará así:

$$U = \int \frac{a}{x}\, dx + \varphi(y, z) = \frac{ax}{z} + \varphi(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{b}{z} = \varphi'_y(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{by-ax}{z^2} = -\frac{ax}{z^2} + \varphi'_z(y, z)$$

$$\varphi(y, z) = -\frac{by}{z} + \Psi(z)$$

$$\varphi'_z(y, z) = \frac{by}{z^2} + \Psi'(z) = \frac{by}{z^2}, \quad \text{luego } \Psi'(z) = 0, \ \Psi(z) = C$$

sustituyendo

$$U = \frac{ax-by}{z} + C$$

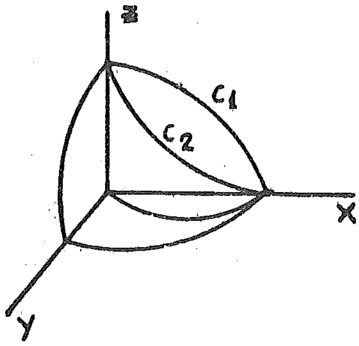
8.2.- Calcular:

$$\int_C 2yz^2 dx + xz^2 dy + 3xy\, zdz, \quad \text{siendo C}$$

el contorno cerrado situado en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y formado por los arcos:

$$c_1 \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y = 0 \\ x > 0, \quad z > 0 \end{array} \right\} \quad \text{y}$$

$$c_2 \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \\ y > 0, \quad z > 0 \end{array} \right\}$$



$$I = I_{c_1} + I_{c_2}$$

en el arco c_1 se tiene $y = 0$, $dy = 0 \Longrightarrow I_{c_1} = 0.$

en c_2, utilizamos polares $\left|\begin{array}{l} x = \rho \operatorname{sen}\vartheta . \cos\varphi \\ y = \rho . \operatorname{sen}\vartheta . \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho . \cos\vartheta \end{array}\right.$

que para la línea c_2, como se tiene: $\left|\begin{array}{r} \rho = a \\ \operatorname{sen}\vartheta = \cos\varphi \\ \vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi \end{array}\right|$ quedarán como:

ecuaciones paramétricas de c_2 las siguientes: $\left|\begin{array}{l} x = a . \cos^2\varphi \\ y = a \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \\ z = a . \operatorname{sen}\varphi \end{array}\right|$ diferenciando y sustituyendo:

$$I_{c_2} = \int_0^{\pi/2} a^4(-5\operatorname{sen}^4\varphi . \cos^2\varphi + 4\cos^4\varphi . \operatorname{sen}^2\varphi)d\varphi = -\frac{\pi a^4}{32}$$

$$I = I_{c_1} + I_{c_2} = -\frac{\pi a^4}{32}$$

5

Integral Doble

LECCION 5

INTEGRAL DOBLE

1.- Concepto de integral doble.-

El concepto de integral definida de Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$ es generalizable sustituyendo el intervalo $[a,b]$ por una región n-dimensional en la que esté definida y acotada la función f. Así para n = 2, obtendremos una integral doble y para n = 3 una triple. Vamos a detallar el caso de integral doble.

Consideremos la función $z = f(x,y)$, definida y acotada en todos los puntos del dominio R perteneciente al plano xy.

Realizamos una partición del dominio R mediante curvas arbitrarias, en m partes que llamaremos parcelas, representando dichas partes, así como sus áreas por:

$$\Delta\omega_1, \quad \Delta\omega_2, \ldots, \Delta\omega_k, \ldots, \Delta\omega_m$$

En cada una de estas parcelas elegimos un punto arbitrario $p_k \in \Delta\omega_k$, y formamos la suma de los valores de la función f en cada uno de dichos puntos por el área de la parcela correspondiente, llamando a esta expresión "suma integral":

$$\sum_{k=1}^{m} f(p_k).\Delta\omega_k = f(p_1)\Delta\omega_1 + f(p_2)\Delta\omega_2 + \ldots + f(p_m)\Delta\omega_m = S_m$$

Se observa que cuando la función $f(x,y)$ es positiva en R, cada sumando $f(p_k)\Delta\omega_k$ representa geométricamente el volumen de un cilindro elemental de base $\Delta\omega_k$ y altura $f(p_k)$, y S_m representa la suma de los volúmenes elementales indicados.

Volvemos a dividir el dominio R y consideramos el conjunto formado por las divisiones antiguas y las nuevas, obteniendo m_2 parcelas $(m_2 \geqslant m)$ y una nueva suma integral:

$$\sum_{k=1}^{m_2} f(p'_k)\Delta\omega'_k = f(p'_1)\Delta\omega'_1 + \ldots + f(p'_{m_2})\Delta\omega'_{m_2} = S_{m_2}$$

$$\Delta\omega'_k \leqslant \Delta\omega_k$$

Repetimos n veces este proceso, exigiendo que los diámetros de las parcelas formen una sucesión nula y por tanto que el área de cada parcela tienda a cero, cuando $n \to \infty$, obteniendo una sucesión de sumas integrales.

$$S_m, S_{m_2}, \ldots, S_{m_n}, \ldots$$

Siendo $S_{m_n} = \sum_{k=1}^{m_n} f(p_k^{(n-1}).\Delta\omega_k^{(n-1}$

Decimos que existe la integral doble según Riemann de $f(x, y)$ en R y la representamos por L, si dado un número $\varepsilon > 0$ y arbitrario, se puede encontrar un valor p, tal que para $n \geqslant p$, se tenga: $|S_{m_n} - L| < \varepsilon$, cualquiera que sean los puntos p_k elegidos en cada parcela $\Delta\omega_k$.

Este límite L se llama integral doble de la función $f(x, y)$ extendida al dominio R y se representa así:

$$L = \iint_R f(p)d\omega = \iint_R f(x, y)dx.dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(p_k)\ \Delta\ \omega_k$$

Si llamamos M_k y m_k a los extremos superior e inferior de la función en cada parcela ω_k y formamos las sumas:

$$\sum_{k=1}^{m} M_k \Delta\omega_k = M_1\ \Delta\omega_1 + M_2\ \Delta\omega_2 + \ldots + M_m . \Delta\omega_m = S$$

$$\sum_{k=1}^{m} m_k \Delta\omega_k = m_1\ \Delta\omega_1 + m_2\ \Delta\omega_2 + \ldots + m_k \Delta\omega_k = s$$

como

$$m_k \leqslant f(p_k) \leqslant M_k \quad \text{se tendrá:}$$

$$\Sigma\ m_k\ \Delta\omega_k \leqslant \Sigma f(p_k)\ \Delta\omega_k \leqslant \Sigma M_k \Delta\omega_k\ ; \qquad \text{ó sea } s \leqslant S_m \leqslant S$$

del mismo modo que antes, para las sucesivas particiones del recinto R, se tendrá:

$$s_n \leqslant S_{m_n} \leqslant S_n\ ; \qquad n = 1, 2, \ldots, p, \ \ldots, \ n, \ldots$$

Si las sucesiones así formadas s_n y S_n, cumplen la condición de que dado un ε positivo y arbitrario, se puede encontrar un valor p, tal que para $n > p$ se verifique $|S_n - s_n| < \varepsilon$, tendrán ambas igual límite que coincidirá con el de la sucesión S_{m_n} y se tendrá pues

$$s_n < \iint_R f(x, y).d\omega < S_n$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} f(p_k)\Delta\,\omega_k = \iint_R f(x,\ y).d\omega$$

2.- Funciones Integrables.-

Vamos a demostrar que si la función $f(x,y)$ es continua en el dominio R, es integrable según Riemann en él.

Por ser la función continua en R, será uniformemente continua en él, por lo que dado un valor $\varepsilon > 0$ y arbitrario, se podrá encontrar un δ, tal que para todo par de puntos P y P' tales que $\overline{PP'} < \delta$, se tendrá: $|f(P)-f(P')| < \varepsilon$,

Por lo tanto:

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k).\Delta\omega_k < \varepsilon \sum_{1}^{n} \omega_k = \varepsilon(\text{Area de R})$$

M_k y m_k serán los máximos y mínimos absolutos de la función en la parcela $\Delta\omega_k$ (por ser la función continua) y su diferencia será la oscilación máxima entre dos puntos cualesquiera P y P' de dicha parcela:

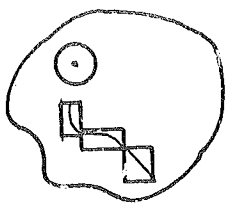
$$|f(P)-f(P')| < |M_k - m_k| < \varepsilon$$

por lo que bastará que el diámetro máximo de cada parcela sea menor que δ.

Si la función $f(x,y)$ no es continua en R, pero estando acotada en dicho dominio, tiene un número finito de puntos aislados de discontinuidad $p_1, p_2, \dots p_k$, o es discontinua a lo largo de una curva de Jordan interior al dominio, o en un conjunto de puntos recubribles por entornos cuya área total tiende a cero, se mantiene la existencia de la integral doble, ya que la expresión

$$S_n - s_n = \Sigma (M_k - m_k)\Delta\omega_k$$

solo sufriría modificación en los sumandos correspondientes a las parcelas $\Delta\omega_k$ que contengan dichos puntos. Pero como la oscilación está acotada $M_k - m_k < k$ (oscilación total de la función en R), todos esos sumandos se podrán hacer $< k\Sigma\omega_k$ siendo $\Sigma\omega_k$ la suma de las áreas de las parcelas que los recubren que por hipótesis tiende a cero.



3.- Propiedades de la integral doble.-

3.1.- Propiedad aditiva del integrando.-

La integral doble, extendida a un dominio R, de una suma de un número p finito de funciones $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, es igual a la suma de las p integrales dobles, extendidas a R, de cada una de dichas funciones.

$$\iint_R [\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y) +\ldots+ \varphi_p(x,y)] \, . d\omega = \iint_R \varphi_1(x,y)d\omega +\ldots+ \iint_R \varphi_p(x,y)d\omega$$

3.2.- Linealidad.-

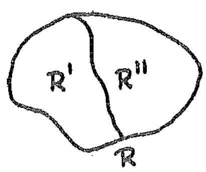
La integral doble, extendida a un dominio R, de una constante por una función, es igual a la constante por la integral doble de la función, en el mismo dominio R.

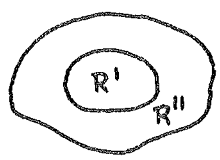
$$\iint_R k.f(x,y).d\omega = k.\iint_R f(x,y)d\omega$$

La demostración de ambas propiedades es trivial e idéntica a la correspondiente en integrales simples.

3.3.- Propiedad aditiva del dominio de integración.-

Si la función f(x, y) es integrable en el dominio R, y dividimos dicho dominio en otros dos R' y R'' sin poseer puntos interiores comunes, será también integrable en cada uno de ellos y se verificará:





$$\iint_R f(x, y)d\omega = \iint_{R'} f(x, y)d\omega + \iint_{R''} f(x, y)d\omega$$

Para demostrarlo, bastará descomponer la suma integral de la forma:

$$\sum_R f(p_k)\Delta \omega_k = \sum_{R'} f(p_k)\Delta \omega_k + \sum_{R''} f(p_k)\Delta\omega_k$$

Como la integral doble no depende de la forma de dividir el dominio R, se efectúa la división de forma que la frontera entre R' y R'' sea una división de R.

3.4.- Acotación.-

Si la función $f(x, y) \leqslant \varphi(x, y)$ en R, se verificará

$$\iint_R f(x, y)d\omega \leqslant \iint_R \varphi(x, y)d\omega$$

Es evidente ya que $\iint_R [f(x, y) - \varphi(x, y)] d\omega \leqslant 0$ y aplicando la propiedad primera quedará:

$$\iint_R f(x, y)d\omega - \iint_R \varphi(x, y)d\omega \leqslant 0$$

También podemos establecer la acotación del módulo de la integral. Si se tiene: $|f(x, y)| < M$ en R.

$$\left|\iint_R f(x, y) \, d\omega\right| \leqslant \iint_R |f(x, y)| \, d\omega < M. \iint_R d\omega = M.A_R$$

donde A_R es el área del recinto R.

3.5.- Teorema de la media.-

Consideremos la función $f(x, y)$ integrable en un dominio R y sean M y m los extremos superior e inferior respectivamente de la función $f(x, y)$ en R, verificando pues, para cualquier punto (x_k, y_k) de R:

$$m \leqslant f(x_k, y_k) \leqslant M$$

$m.\ \Delta\omega_k \leqslant f(x_k, y_k).\ \Delta\omega_k \leqslant M.\Delta\omega_k,$ luego:

$\sum_1^n m.\Delta\omega_k < \sum_1^n f(x_k, y_k).\Delta\omega_k < \sum_1^n M.\ \Delta\omega_k,$ tomando límites

$m.A_R < \iint_R f(x,y).d\omega < M.A_R$ siendo A_R el área encerrada en el dominio R. La desigualdad anterior permite escribir

$$\iint_R f(x,y)d\omega = \lambda.\ A_R, \text{ siendo } m < \lambda < M$$

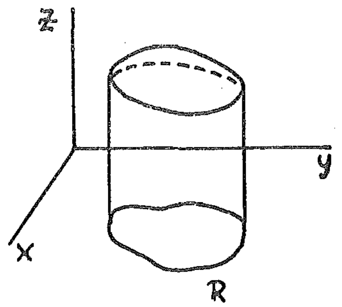
cuando la función f(x, y) sea continua en R, pasará del mínimo absoluto m al máximo absoluto M por todos los valores intermedios, luego existirá al menos un punto $(x_0,\ y_0) \in R$ en donde $f(x_0,\ y_0) = \lambda$ y se podrá decir que la integral doble de una función continua f(x, y) en un dominio R es igual al valor de la función en un punto $p_0(x_0, y_0)$ de dicho dominio por el área del mismo.

$$\iint_R f(x,y)d\omega = f(x_0, y_0).A_R$$

4.- Cálculo de áreas y volúmenes utilizando integrales dobles.-

Del concepto de integral definida ya visto, se desprende que el volumen del cilindroide limitado por la superficie no negativa f(x, y) para $(x, y) \in R$, el plano z = 0 y el cilindro recto de generatrices paralelas al eje OZ y directriz la frontera del dominio R, viene dado por

$$V = \iint_R f(x,y)d\omega$$



Si el cuerpo del que queremos hallar el volumen está limitado por las superficies $z = f_2(x, y)$ y $z = f_1(x, y)$, siendo $f_2(x, y) \geqslant f_1(x, y)$, para todo $(x, y) \in R$

el volumen se podrá expresar así:

$$V = \iint_R [f_2(x,y) - f_1(x,y)]\, d\omega$$

Si en el caso primero, la función f(x, y) cambia de signo en el dominio R, siendo positiva o nula en R_1 y negativa o nula en R_2. $R = R_1 + R_2$, el volumen del cilindroide será:

$$V = \iint_{R_1} f(x,y)d\omega - \iint_{R_2} f(x,y)d\omega$$

Para hallar áreas planas, por ejemplo la del dominio R, consideremos la función f(x, y) = 1; la $\iint_R f(x,y)d\omega = \iint_R d\omega$ representa el volumen de un cilindroide de base R y de altura la unidad, luego:

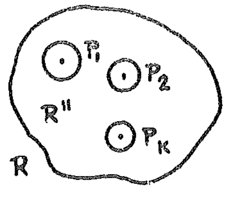
$$V = A_R \cdot 1 = A_R = \iint_R d\omega$$

5.- Generalización del concepto de integral doble.-

En la definición de integral doble, se ha considerado una función f(x, y) acotada y un dominio plano limitado R. Vamos a extender la definición de integral doble para los casos de funciones no acotadas y de dominios ilimitados.

a) Caso de función no acotada.

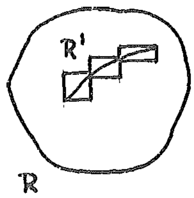
Si la función f(x, y) se hace infinita en un número finito de puntos (x_0, y_0), ..., (x_k, y_k) del dominio R, se recubren dichos puntos con entornos R_k que por ejemplo pueden ser círculos de radio ε interiores a R, llamando $R' = R_1 + R_2 + \ldots + R_k$; $R = R' + R''$. Se calcula el límite de la integral doble extendida a R'', cuando $\varepsilon \to 0$ y, si dicho límite existe, lo llamaremos por definición integral doble de f(x, y) extendida a R.



$$\iint_R f(x,y)d\omega = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{R''} f(x,y)d\omega$$

Análogamente, si existe un conjunto infinito de puntos en los que se hace infinita la función f(x, y), y se pueden recubrir dichos puntos por recintos R' cuya área tiende a cero eligiendo R' convenientemente, diremos por definición que

$$\iint_R f(x,y)d\omega = \lim_{R' \to 0} \iint_{R''} f(x,y)d\omega$$



siempre que este límite sea independiente de la forma de elegir los recintos R'.

b) <u>Caso de dominios ilimitados.</u> -

Consideremos un dominio ilimitado R y construyamos una sucesión de dominios $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ tal que $\lim_{n\to\infty} R_n = R$. Definimos como integral doble extendida a R, al límite de la integral doble extendida a R_n, cuando $n \to \infty$, siempre que ese límite exista y sea el mismo para cualquier sucesión R'_n de límite R. Si el límite de R_n es R cada recinto parcial de R es interior a los dominios R_n, a partir de un valor de n.

$$\iint_R f(x,y)d\omega = \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)d\omega = \lim_{n\to\infty} \iint_{R'_n} f(x,y)d\omega$$

Si R es todo el plano, podemos formar la sucesión de dominios R_1, R_2.. . R_n,... como círculos de centro el origen y radios crecientes, pero también se podría definir dicha sucesión como cuadrados de centro el origen y lados crecientes o rectángulos, etc. y dicho límite debe existir y ser el mismo para todas las sucesiones que elijamos, por lo que se ve la dificultad de expresar de un modo general, para cualquier función f(x, y), esta definición.

Caso particular es que la función f(x, y) tenga signo constante en todo el dominio R, en cuyo caso vamos a demostrar que dicho límite es independiente -

de la sucesión que elijamos. Supongamos $f(x,y) \geq 0$ en R y que $\iint_R f(x,y)d\omega$ tiene límite para una sucesión de dominios R_1, $R_2, \ldots R_n, \ldots$ tales que $\lim_{n \to \infty} R_n = R$ y $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \ldots \subset R_n \subset \ldots$ Elijamos otra sucesión de dominios $R'_1, R'_2, \ldots, R_n, \ldots$, tales que $\lim_{n \to \infty} R'_n = R$ y $R'_1 \subset R'_2 \subset R'_3 \subset \ldots \subset R'_n \subset \ldots$

Cualquiera que sea s, se podrán encontrar dos valores p y t, tales que

$$R_p \subseteq R'_s \subset R_t \quad \text{y por lo tanto:}$$

signo si en R'_s $f(x,y)<0$ no se cumpliría esto

$$\iint_{R_p} f(x,y)d\omega \leq \iint_{R'_s} f(x,y)d\omega \leq \iint_{R_t} f(x,y)\, d\omega$$

y como:

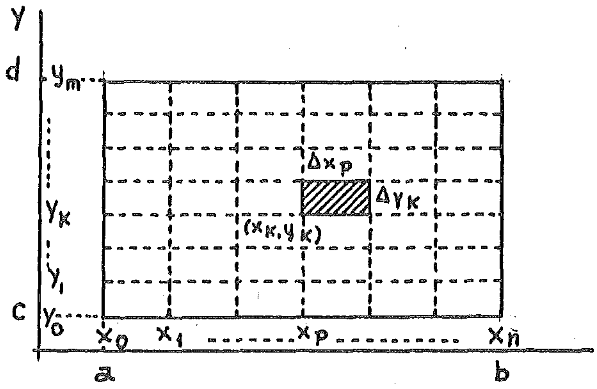
$$\lim_{p \to \infty} \iint_{R_p} f(x,y)d\omega = \lim_{t \to \infty} \iint_{R_t} f(x,y)d\omega = \iint_R f(x,y)\, d\omega$$

la integral del centro tendrá límite y su valor coincidirá con el de las dos entre las que está constantemente comprendida

$$\lim_{s \to \infty} \iint_{R'_s} f(x,y)d\omega = \lim_{n \to \infty} \iint_{R_n} f(x,y)d\omega = \iint_R f(x,y)d\omega .$$

6.- Cálculo de una integral doble extendida al dominio encerrado por un rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados.-

Consideremos la función $f(x,y)$, continua en el dominio R, limitado por las rectas $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$. Como la función es continua, la integral doble extendida a R existe cualquiera que sea la parcelación del dominio que se realice y con independencia de los puntos p_k que se elijan dentro de cada parcela. Por lo tanto parcelamos con paralelas al eje OX, $y = y_0, y=y_1, \ldots, y=y_k, \ldots, y = y_m$, y con paralelas al eje OY, $x = x_0$, $x=x_1, \ldots x=x_p, \ldots, x=x_n$, obteniendo como parcelas rectángulos elementales $\Delta\omega_k$ de área $\Delta\omega_k = \Delta x_p \cdot \Delta y_k$, e imponemos la condición de que estos incrementos tiendan a cero, para cualquier valor de p y k. Asimismo, elegimos como punto p_k el vértice inferior izquierdo del rectángulo elemental $p_k(x_k, y_k)$. La expresión de la suma integral será pues



una suma doble que se podrá escribir así:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{p=0}^{n-1} f(x_p, y_k)\Delta x_p \cdot \Delta y_k = \sum_{k=0}^{m-1}\Delta y_k \sum_{p=0}^{n-1} f(x_p, y_k)\Delta x_p = \sum_{k=0}^{m-1}\Delta y_k \left[\int_a^b f(x,y)dx + \right.$$

$$\left. + \delta_k\right] = \sum_{k=0}^{m-1}\Delta y_k \int_a^b f(x, y_k).dx + \sum_{k=0}^{m-1}\Delta y_k \cdot \delta_k$$

Estas dos últimas igualdades se han escrito teniendo en cuenta que la integral de una función continua de un parámetro se podía expresar como límite uniforme de una suma, como se estudió en las integrales dependientes de un parámetro, por lo que $|\delta_k| < \varepsilon$, cualquiera que sea y_k, siempre que $\Delta x_p \to 0$. Así pues

$$\sum_{k=0}^{m-1}\Delta y_k \cdot \delta_k < \varepsilon \sum_{k=0}^{m-1}\Delta y_k = \varepsilon(d-c)$$ que se hace tan pequeño como queramos cuando $\Delta x \to 0$, con lo que quedará tomando límites:

$$\iint_R f(x,y)d\omega = \lim_{\substack{\Delta x_p \to 0 \\ \Delta y_k \to 0}} \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{p=0}^{n-1} f(x_p, y_k)\Delta x_p \cdot \Delta y_k = \lim_{\Delta x_p \to 0}\sum_{k=0}^{m-1}\Delta y_k \int_a^b f(x, y_k)dx =$$

$$= \int_c^d dy\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]$$

Se podría haber expresado también, sumando primero por columnas de esta otra forma:

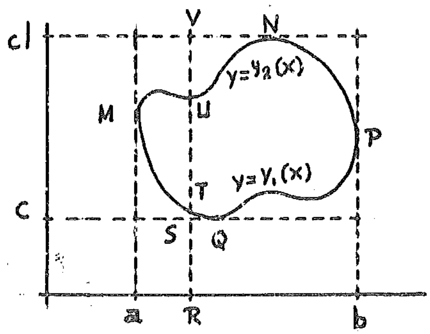
$$\iint_R f(x,y)d\omega = \int_a^b dx\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]$$

Podemos generalizar el cálculo anterior para funciones no continuas, pero acotadas, que tengan un número finito de discontinuidades, o un número infinito de puntos de discontinuidad situados a lo largo de curvas de Jordan.

7.- Cálculo de la integral doble en un dominio no rectangular.-

Sea la función f(x, y) continua en el dominio R que está limitado por una curva tal que toda la recta la corta en un número finito de puntos (curva de Jordán). Circunscribimos R en un dominio rectangular de lados paralelos a los ejes coordenados $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ que llamaremos R' y definimos en él una nueva función $\varphi(x, y)$ de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{lll}\varphi(x, y) = f(x, y) & \text{para} & (x, y) \in R \\ \varphi(x, y) = 0 & \text{para} & (x, y) \notin R\end{array}\right\} \quad (1)$$



Por definición de integral doble:

$$\iint_{R'} \varphi(x, y)d\omega = \iint_R f(x, y)d\omega$$

Como el dominio R' es un rectángulo sabemos calcular la integral doble en él

$$\iint_{R'} \varphi(x, y)d\omega = \iint_{R'} \varphi(x, y)dx.dy = \int_a dx\left[\int_c^d \varphi(x, y)dy\right]$$

La integral del corchete, representando las ordenadas de los puntos S, T, U, V por ellos mismos, se podrá escribir teniendo en cuenta que en ella x es una constante $(x = x_R)$

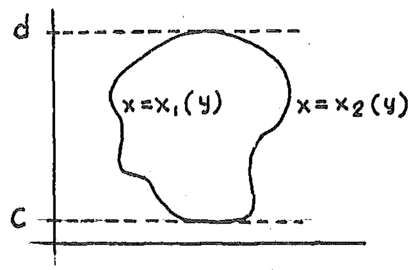
$$\int_c^d \varphi(x, y)dy = \int_S^V \varphi(x, y)dy = \int_S^T \varphi(x, y)dy + \int_T^U \varphi(x, y)dy + \int_U^V \varphi(x, y)dy$$

Por la definición (1) de $\varphi(x, y)$ quedará:

$$\int_c^d \varphi(x, y)dy = \int_T^U \varphi(x, y)dy = \int_T^U f(x, y)dy \quad .$$

Si la recta $x = x_a$ corta al contorno del dominio sólo en dos puntos T y U, de coordenadas $y_T = y_1(x_R)$, $y_U = y_2(x_R)$ podemos poner:

$$\iint_R f(x, y)d\omega = \int_a^b dx \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right]$$



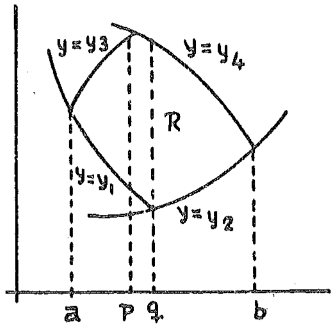
También podríamos haber expresado esta integral, integrando primero respecto a x, obteniendo:

$$\iint_R f(x, y)\, d\omega = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx$$

Si el dominio está limitado por curvas diferentes, se descompondría en varios, y así para el ejemplo de la figura se podría expresar:

$$\iint_R f(x, y)d\omega = \int_a^p dx \int_{y_1(x)}^{y_3(x)} f(x, y)dy + \int_p^q dx \int_{y_1(x)}^{y_4(x)} f(x, y)dy +$$

$$+ \int_q^b dx \int_{y_2(x)}^{y_4(x)} f(x, y)dy$$



8.- Teorema de Riemann.-

Este teorema debido a Riemann relaciona entre sí la integral curvilínea extendida a un contorno cerrado C, con la integral doble extendida al domino R que tiene a C como contorno, y su enunciado es el siguiente: Sean $P(x,y)$ y -- $Q(x,y)$ dos funciones definidas y continuas en un dominio R limitado por la curva de Jordán C; si las derivadas parciales $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ existen y están acotadas en R y existen las integrales dobles de estas derivadas en R, $\iint_R \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy$ y $\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy$, se cumple que:

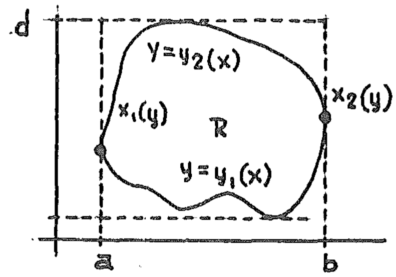
$$\iint_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy = \int_{c} P.dx + Q.dy$$

Para demostralo, calculemos primero la integral

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy = \int_a^b [P(x,y)]_{y_1(x)}^{y_2(x)}\, dx = \int_a^b P[x, y_2(x)]dx -$$

$$- \int_a^b P[x, y_1(x)]\, dx = \int_a^b P[x, y_2(x)]dx + \int_b^a P[x, y_1(x)]dx = \oint_c P(x,y)dx = -\oint_c P(x,y)dx \quad (1)$$

ya que la suma de esas dos integrales simples es por definición la integral curvilínea a lo largo del contorno c.



De manera similar podemos poner:

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = \int_c^d Q(x,y)\Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy =$$

$$= \int_c^d Q[x_2(y), y]dy - \int_c^d Q[x_1(y), y]dy = \int_c^d Q[x_2(y), y]\,dy + \int_d^c Q\,[x_1(y)]\,dy =$$

$$= \int_{c\circlearrowleft} Q(x,y)dy \qquad (2)$$

Las dos integrales curvilíneas de las fórmulas (1) y (2), tienen el mismo sentido; al recorrerlas según el contorno c, el dominio R que encierra queda a su izquierda; a este sentido lo consideraremos por convenio positivo. Así pues, las fórmulas (1) y (2) obtenidas expresan:

$$-\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = +\int_{c\circlearrowleft} P(x,y)dx$$

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{c\circlearrowleft} Q(x,y)dy \quad \text{sumándolas se obtiene}$$

$$\oint_{c\circlearrowleft} P.dx+Q.dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Este teorema es también conocido con el nombre de Teorema de Green, en recuerdo del físico y matemático inglés D. Green, siendo un caso particular de una fórmula más general obtenida por el matemático ruso Ostrogradski.

9.- Cambio de variables en las integrales dobles.-

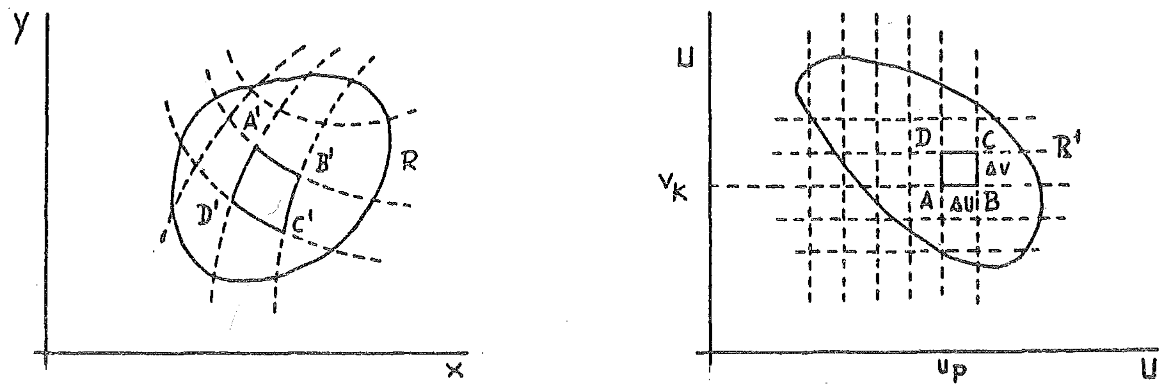
En la práctica, cuando tratamos de calcular una integral doble de una determinada función f(x, y) en un dominio R, nos encontramos con la dificultad de calcular directamente dicha integral, lo mismo que nos sucedía con las integrales simples. Para resolver este problema se plantea la necesidad de efectuar cambios de variable en ellas que simplifiquen la función o el propio dominio de integración.

Supongamos, pues, que queremos calcular $\iint_R f(x, y)dxdy$, siendo la función f(x, y) continua en R, estando dicho dominio limitado por una curva C, y queremos sustituir las variables x, y, por otras nuevas U, V, relacionadas con ellas mediante las ecuaciones de transformación:

$$x = x(U.V); \quad y = y(U.V) \tag{1}$$

siendo las funciones x(U.V), y(U, V) uniformes, continuas y con derivadas continuas en el dominio R' transformado del R mediante dichas ecuaciones, cumpliéndose además que las ecuaciones (1) establecen una correspondencia biunívoca entre (x, y) y (U, V)y por consiguiente entre los dominios R y R'.

Si consideramos una recta U = constante en R', por las ecuaciones (1) se transformará en el plano xy en una determinada curva. Análogamente, a las rectas V = constante del plano UV les corresponderán curvas del plano XY.



Parcelamos el dominio R' mediante rectas paralelas a los ejes coordenados U = constante, V = constante, en rectángulos elementales de lados ΔU_p y ΔV_k. A cada uno de estos rectángulos ABCD de área $\Delta\omega' = \Delta U\ \Delta V$, les corresponderá en el plano XY un cuadrilátero no curvilíneo A'B'C'D' de área $\Delta\omega$.

La función f(x, y), mediante las ecuaciones (1), se transformará en la F(U.V), estando ambas relacionadas por:

$$F(U,V) = f[x(U,V), y(U,V)]$$

Las coordenadas de los vértices del cuadrilátero curvilíneo A'B'C'D' - son:

$$\begin{array}{ll} x_{A'} = x(U_p, V_k) & y_{A'} = y(U_p, V_k) \\ x_{B'} = x(U_p+\Delta U, V_k) & y_{B'} = y(U_p + \Delta U, V_k) \\ x_{C'} = x(U_p+\Delta U, V_k+\Delta V) & y_{C'} = y(U_p+\Delta U, V_k+\Delta V) \\ x_{D'} = x(U_p, V_k + \Delta V) & y_{D'} = y(U_p, V_k + \Delta V) \end{array}$$

Quedándonos con los infinitésimos de primer orden, se podría escribir - así:

$$\begin{array}{ll} x_{A'} = x(U_p . V_k) & y_{A'} = y(U_p, V_k) \\ x_{B'} = x(U_p, V_k) + \dfrac{\partial x}{\partial U} \Delta U & y_{B'} = y(U_p, V_k) + \dfrac{\partial y}{\partial U} \Delta U \\ x_{C'} = x(U_p . V_k) + \dfrac{\partial x}{\partial U} . \Delta U + \dfrac{\partial x}{\partial V} . \Delta V & y_{C'} = y(U_p, V_k) + \dfrac{\partial y}{\partial U} \Delta U + \dfrac{\partial y}{\partial V} \Delta V \\ x_{D'} = x(U_p . V_k) + \dfrac{\partial x}{\partial V} . \Delta V & y_{D'} = y(U_p, V_k) + \dfrac{\partial y}{\partial V} . \Delta V \end{array}$$

El área del cuadrilátero curvilíneo será equivalente al doble de la del - triángulo A'B'C' y quedará desparticularizando:

$$\Delta\omega \simeq |(x_{C'}-x_{A'})(y_{C'}-y_{A'})-(x_{C'}-x_{B'})(y_{C'} - y_{A'})| =$$

$$= |(\frac{\partial x}{\partial U}\Delta U + \frac{\partial x}{\partial V} . \Delta V) . \frac{\partial y}{\partial V} \Delta V - \frac{\partial x}{\partial V} . \Delta V (\frac{\partial y}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial y}{\partial V} . \Delta V) | =$$

$$= | \frac{\partial x}{\partial U} . \frac{\partial y}{\partial V} . \Delta U \Delta V - \frac{\partial x}{\partial V} . \frac{\partial y}{\partial U} . \Delta U \Delta V | = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial U} & \dfrac{\partial x}{\partial V} \\ \dfrac{\partial y}{\partial U} & \dfrac{\partial y}{\partial V} \end{matrix} \right\| \Delta U . \Delta V =$$

$$= | \frac{D(x,y)}{D(U,V)} | \Delta U . \Delta V \quad \text{ó sea:}$$

$$\Delta\omega \simeq | \frac{D(x,y)}{D(U.V)} | \Delta\omega'$$

La igualdad será válida cuando las particiones en R y R' sean tales que sus diámetros formen una sucesión nula, ó sea:

$$\left| \frac{D(x,y)}{D(U,V)} \right| = \lim \frac{\Delta \omega'}{\Delta \omega} \quad \text{cuando el diámetro de } \Delta\omega \to 0$$

La suma integral quedará transformada así:

$$\sum_R f(x,y)\Delta\omega \simeq \sum_{R'} F(U.V) \left| \frac{D(x,y)}{D(U.V)} \right| \Delta\omega'$$

tomando límites quedará:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R'} f\,[x(U,V),y(U,V)] \left| \frac{D(x,y)}{D(U,V)} \right| dU.dV$$

Si hacemos el cambio a polares, $x = \varrho.\cos\vartheta$, $y = \varrho.\operatorname{sen}\vartheta$.

$$\frac{D(x,y)}{D(\varrho,\vartheta)} = \varrho \text{ y quedará:}$$

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R'} f[\varrho.\cos\vartheta,\ \varrho.\operatorname{sen}\vartheta].\ \varrho.d\varrho.d\vartheta$$

En paramétricas $x = a.\varrho.\cos\vartheta$, $y = b.\varrho.\operatorname{sen}\vartheta$.

$$\frac{D(x,y)}{D(\varrho,\vartheta)} = a.b.\varrho \qquad \text{y quedaría:}$$

$$\iint_R f(x,y).dxdy = \iint_{R'} f(a.\varrho.\cos\vartheta,\ b.\varrho.\operatorname{sen}\vartheta)\ .\ a.b.\ \varrho d\varrho\ .\ d\vartheta$$

Este último cambio se utiliza a veces cuando el dominio R es el formado por los puntos interiores a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en cuyo caso, al hacer el cambio anterior, ϑ variará de 0 a 2π y ϱ de 0 a 1.

10.- Relación entre las funciones β y Γ.-

Cuando se estudió la función β, se demostró la relación:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

sólo para valores de p y q enteros y positivos. Vamos a demostrar ahora la validez de dicha fórmula para cualquier valor positivo de ambos parámetros.

Previamente podemos comprobar que la integral doble de una función de la for ma f(x), $\varphi(y)$, extendida a un dominio rectangular $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, se puede descomponer en producto de dos integrales simples.

$$\iint_R f(x).\varphi(y).dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x).\varphi(y).dy = [\int_a^b f(x)dx][\int_c^d \varphi(y)\ dy]$$

La demostración es trivial, teniendo en cuenta el cálculo de una integral doble en un dominio rectangular.

Recordemos la expresión de Γ (con el cambio $x = y^2$)

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}.e^{-x}dx = 2\int_0^\infty x^{2p-1}.e^{-x^2}.dx$$

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty x^{q-1}.e^{-x}dx = 2\int_0^\infty y^{2q-1}.e^{-y^2}.dy$$ multiplicando ambas igualdades.

$$\Gamma(p).\Gamma(q) = 4[\int_0^\infty x^{2p-1}.e^{-x^2}.dx][\int_0^\infty y^{2q-1}.e^{-y^2}.dy] =$$

$$= 4.\int_0^\infty dx \int_0^\infty x^{2p-1}.y^{2q-1}.e^{-(x^2+y^2)}.dy$$

por la propiedad anterior. En esta integral doble pasamos a polares

$x = \varrho.\cos\vartheta.$

$y = \varrho.\text{sen}\,\vartheta.$

$$\frac{D(x,y)}{D(\varrho,\vartheta)} = \varrho$$ y queda

$$\Gamma(p).\Gamma(q) = 4\int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty \cos^{2p-1}\vartheta.\text{sen}^{2q-1}\vartheta.\varrho^{2(p+q)-1}\ d\varrho$$

$$= 2[\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\vartheta.\text{sen}^{2q-1}\vartheta.d\vartheta]\ 2[\int_0^\infty \varrho^{2(p+q)-1}.e^{-\varrho^2}d\varrho] =$$

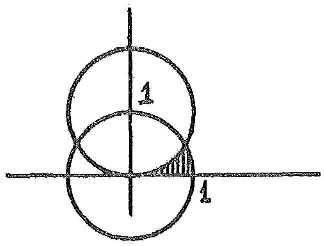
$$= \beta(p.q).\Gamma(p+q)$$

11.- <u>Ejemplos</u>.-

11.1.- Calcular la integral doble.

$$I = \iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy, \text{ siendo R el dominio limitado por: } \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2y \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 - 1 \leqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{array} \right|$$

Pasamos a polares y el dominio R' correspondiente al R al hacer el cambio, en el plano (ϱ, ϑ), será:



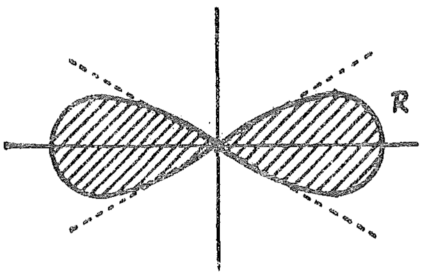
$$0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{6}; \; 2 \operatorname{sen}\vartheta \leqslant \varrho \leqslant 1$$

$$I = \int_0^{\pi/6} d\vartheta \int_{2\operatorname{sen}\vartheta}^{1} \varrho^2 . d\varrho = \int_0^{\pi/6} \left| \frac{\varrho^3}{3} \right|_{2\operatorname{sen}\vartheta}^{1} d\vartheta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/6} (1 - 8\operatorname{sen}^3\vartheta)\, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{6} + 3\sqrt{3} - \frac{16}{3} \right)$$

11.2.- Mediante una integral doble calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie $x^2 - y^2 = 2az$, el cilindro: $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ y el plano $z = 0$.

El volumen vendrá dado por: $V = \iint_R \frac{x^2 - y^2}{2a}\, dxy$



Pasando el cilindro a polares queda:

$$\varrho^4 = a^2 . \varrho^2 . \cos^2 \omega \; ; \; \varrho = a \sqrt{\cos \omega}$$

$$V = \iint_{R'} \frac{\cos 2\omega}{2a} . \varrho^3 . d\omega . d\varrho = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2\omega}{2a} d\omega \int_0^{a\sqrt{\cos 2\omega}} \varrho^3 . d\varrho =$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2\omega}{2a}\, d\omega \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{a\sqrt{\cos 2\omega}} = 4\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2\omega}{2a} \cdot \frac{a^4 . \cos^2 . 2\omega}{4} =$$

$$= 4\,\frac{a^3}{8}\int_0^{\pi/4} \cos^3 2\omega\, d\omega \text{ , haciendo } 2\omega = t, \text{ queda:}$$

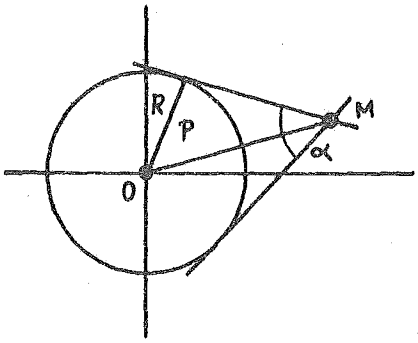
$$V = \frac{a^3}{4}\int_0^{\pi/2} \cos^3 t = \frac{a^3}{6}$$

11.3.- Por un punto M exterior a un círculo C de centro el origen y radio R, se trazan dos tangentes al círculo que forman entre sí un ángulo α . Calcular el valor de la integral doble

$$I = \iint_R (\alpha - \operatorname{sen}\alpha) . dx\, dy$$

siendo R el dominio exterior a todo el círculo.

Operando en coordenadas polares se tendrá:



$$OM = \rho = \frac{R}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} \; ; \; \operatorname{sen}\alpha = 2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2R}{\rho^2}\sqrt{\rho^2 - R^2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \text{arc sen}\,\frac{R}{\rho}$$

$$I = \iint_R (\alpha - \operatorname{sen}\alpha) dxdy = \iint_{R'} \left(2.\text{arc sen}\,\frac{R}{\rho} - \frac{2R}{\rho^2}\sqrt{\rho^2 - R^2}\right). \rho . d\rho .\, d\vartheta =$$

$$= 2\int_R^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} \left(\rho.\text{arc sen}\,\frac{R}{\rho} - \frac{R}{\rho}\sqrt{\rho^2 - R^2}\right) d\vartheta =$$

$$= 4\pi \int_{R}^{\infty} [Q \, . \text{arc sen} \frac{R}{Q} - \frac{R}{Q} \sqrt{Q^2-R^2}\,] \, dQ = 4\pi \, (I_1 + I_2)$$

Para el primer sumando, integramos por partes:

$$I_1 = \int Q \, . \text{arc sen} \frac{R}{Q} \, dQ = \frac{Q^2}{2} . \text{arc sen} \frac{R}{Q} + \frac{R}{2} \int \frac{Q \, dQ}{\sqrt{Q^2 - R^2}} =$$

$$= \frac{Q^2}{2} \text{ arc sen} \frac{R}{Q} + \frac{R}{2} \sqrt{Q^2-R^2}$$

Para el segundo sumando:

$$I_2 = R \int \frac{\sqrt{Q^2-R^2}}{Q} \, dQ = R \sqrt{Q^2-R^2} - R^2 . \text{arctg} \frac{\sqrt{Q^2-R^2}}{R} \text{ , luego:}$$

$$I = 4\pi \, [\frac{Q^2}{2} . \text{arc sen} \frac{R}{Q} - \frac{R}{2} \sqrt{Q^2-R^2} + R^2 \, . \text{ arctg} \frac{\sqrt{Q^2-R^2}}{R}\,]_{R}^{\infty}$$

teniendo en cuenta que $\lim\limits_{Q \to \infty} [\frac{Q^2}{2} . \text{arc sen} \frac{R}{Q} - \frac{R}{2} \sqrt{Q^2-R^2} + R^2 . \text{arctg} \frac{\sqrt{Q^2-R^2}}{R}] =$

$$= \lim_{Q \to \infty} [\cancel{\frac{Q^2}{2} . \frac{R}{Q}} - \frac{R}{2} Q(\cancel{1} - \frac{1}{2} \, . \, \frac{R^2}{Q^2}) + R^2 . \frac{\pi}{2}] = \pi \frac{R^2}{2} \text{ , queda:}$$

$$I = 4\pi \, [\frac{\pi R^2}{2} - \frac{R^2}{2} . \frac{\pi}{2}] = \pi^2 R^2$$

6

Integral de superficie

LECCION 6

INTEGRAL DE SUPERFICIE

1.- Resumen de conocimientos anteriores.-

Recordemos las siguientes fórmulas de interés.

a) Recta tangente a una línea en el espacio de ecuaciones paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \text{en el punto} \quad t = t_o$$

la tangente será:

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$$

b) Plano tangente a una superficie de ecuación $z = z(x,y)$, en el punto - (x_0, y_0, z_0) de ella.

$$z-z_0 = z'_{x_0}(x-x_0)+z'_{y_0}(y-y_0)$$

Si la superficie está dada en implícitas por la ecuación $F(x,y,z) = 0$ el - plano tangente será:

$$F'_{x_0}(x-x_o) + F'_{y_0}(y-y_0) + F'_{z_0}(z-z_0) = 0$$

c) Recta normal a una superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) de la misma.

Si la superficie tiene por ecuación $z = z(x,y)$ la normal será:

$$\frac{x-x_0}{z'_{x_0}} = \frac{y-y_0}{z'_{y_0}} = \frac{z-z_0}{-1}$$

y los cosenos directores de la normal se calcularán estableciendo la proporcionalidad

$$\frac{\cos\alpha}{z'_{x_0}} = \frac{\cos\beta}{z'_{y_0}} = \frac{\cos\gamma}{-1} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+z'^2_{x_0} + z'^2_{y_0}}}$$

Si la superficie tiene por ecuación $F(x,y,z) = 0$, la normal será:

$$\frac{x-x_0}{F'_{x_0}} = \frac{y-y_0}{F'_{y_0}} = \frac{z-z_0}{F'_{z_0}}$$

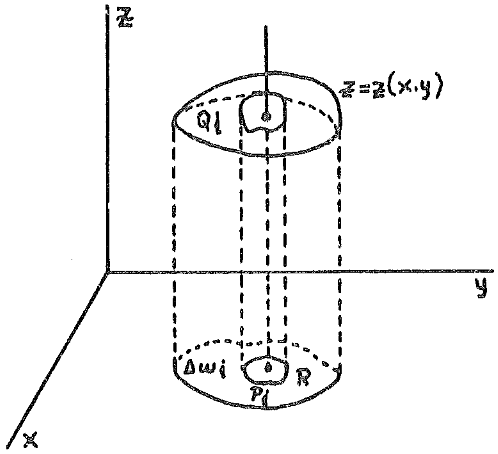
y sus cosenos directores se calcularán análogamente

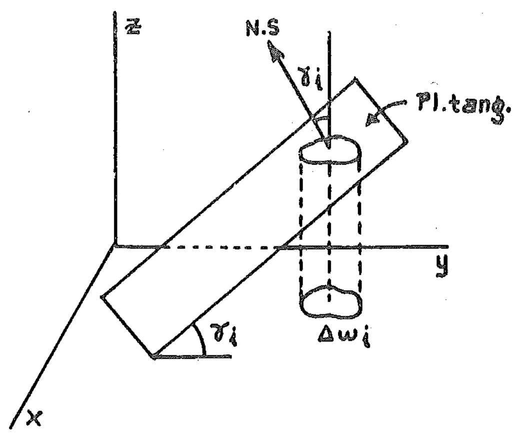
$$\frac{\cos\alpha}{F'_{x_0}} = \frac{\cos\beta}{F'_{y_0}} = \frac{\cos\gamma}{F'_{z_0}} = \frac{1}{\pm\sqrt{F'^2_{x_0}+F'^2_{y_0}+F'^2_{z_0}}}$$

2.- Area de una superficie.-

Para el concepto de área de una superifice, se podría pensar en definirlo como el límite del área de una superficie poliédrica inscrita en la superficie al tender a cero sus caras; sin embargo, al intervenir varias variables en dicho límite, pueden salir valores del límite distintos según como tiendan a cero las caras de dicha superficie, como demostró Schwarz para el caso de una superficie cilíndrica. Vamos pues a aplicar otra definición.

Así pues, supongamos que queremos calcular el área de la porción de superficie σ definida por la función $z = f(x, y)$, uniforme, continua y con derivadas parciales continuas para los valores de (x, y) pertenecientes al dominio R del plano xy donde se proyecta la porción de superficie σ .





Parcelamos arbitrariamente el dominio R, en n parcelas elementales de áreas:

$$\Delta\omega_1, \quad \Delta\omega_2, \ldots, \quad \Delta\omega_i, \ldots, \quad \Delta\omega_n$$

Dentro de cada parcela de área $\Delta\omega_i$, elegimos un punto arbitrario $P_i(x_i, y_i)$, al que corresponderá el punto $Q_i\ [x_i, y_i, z(x_i, y_i)]$ de la superficie.

En el punto Q_i, se traza el plano tangente a la superficie y se proyecta sobre él, en la dirección del eje z, la parcela de área $\Delta\omega_i$. Se tiene así pues sobre cada plano tangente una porción del mismo que llamaremos "escama" de la superficie y tendrá un área de valor $\Delta\sigma_i$. Por definición, se llama área de la porción de superficie considerada, al límite de la suma de las áreas de dichas escamas $\Delta\sigma_i$, cuando los diámetros de las parcelas $\Delta\omega_i$, formen una sucesión nula. O sea

$$\text{Area} = \sigma = \lim \Sigma\, \Delta\sigma_i$$

Si llamamos γ_i, al ángulo que forma el plano tangente en Q_i con el plano $z = 0$, se tendrá que será el mismo que forman su normal y el eje OZ, ó sea es el de la normal a la superficie con el eje OZ que sabemos calcular

$$\frac{1}{\cos\gamma} = \sqrt{1+(z'_x)^2 + (z'_y)^2}$$

Por ser $\Delta\omega_i$ la proyección de $\Delta\sigma_i$, se tendrá

$$\Delta\omega_i = \Delta\sigma_i \cdot \cos\gamma_i$$

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta\omega_i}{\cos\gamma_i}$$

$$\text{Area} = \sigma = \lim \Sigma\, \Delta\sigma_i = \lim \Sigma \frac{\Delta\omega_i}{\cos\gamma_i} = \iint_R \frac{dx\, dy}{\cos\gamma} =$$

$$= \iint_R \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\ .\ dxdy$$

Si la superficie considerada no fuera uniforme respecto de z, pero sí respecto de x ó y, podríamos deducir otras fórmulas similares proyectando sobre el plano yz, ó el xz respectivamente, y se podría escribir así:

$$\text{Area} = \iint_{R'} \sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\; dydz$$

$$\text{Area} = \iint_{R''} \sqrt{1+(y'_x)^2 + (y'_z)^2}\; dxdz$$

siendo R' y R'' los dominios de los planos yz, ó xz donde se proyectaría la superficie.

2.1.- Area de una superficie en paramétricas.-

Si la superficie viene dada por sus ecuaciones paramétricas

$$x = x(U,\ V),\quad y = y(U,\ V),\quad z = z(U,\ V) \tag{1}$$

se puede reducir al problema anterior, efectuando en la integral doble obtenida el correspondiente cambio de variable y calculando previamente para los valores (1), la función subintegral.

$$A = \iint_{R} \sqrt{1+(z'_x)^2 + (z'_y)^2}\; dxdy$$

Diferenciando (1) queda:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial U}\, dU + \frac{\partial x}{\partial V} dV \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial U}\, dU + \frac{\partial y}{\partial V} dV \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial U}\, dU + \frac{\partial z}{\partial V} dV \end{aligned}\right\}$$

Para calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$, se supone y = cte,

$$dy = 0 = \frac{\partial y}{\partial U}\, dU + \frac{\partial y}{\partial V} dV; \quad \frac{dV}{dU} = - \frac{\partial y/\partial U}{\partial y/\partial V} \tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{y=cte} = \frac{\frac{\partial z}{\partial U} dU + \frac{\partial z}{\partial V} dV}{\frac{\partial x}{\partial U} dU + \frac{\partial x}{\partial V} dV} = \frac{\frac{\partial z}{\partial U} + \frac{\partial z}{\partial V}\cdot\frac{dV}{dU}}{\frac{\partial x}{\partial U} + \frac{\partial x}{\partial V}\cdot\frac{dV}{dU}} \tag{3}$$

sustituyendo (2) en (3) queda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial z}{\partial U} - \frac{\partial z}{\partial V} \cdot \frac{\partial y}{\partial U} / \frac{\partial y}{\partial V}}{\frac{\partial x}{\partial U} - \frac{\partial x}{\partial V} \cdot \frac{\partial y}{\partial U} / \frac{\partial y}{\partial V}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial U} \cdot \frac{\partial y}{\partial V} - \frac{\partial z}{\partial V} \cdot \frac{\partial y}{\partial U}}{\frac{\partial x}{\partial U} \cdot \frac{\partial y}{\partial V} - \frac{\partial x}{\partial V} \cdot \frac{\partial y}{\partial U}} = \frac{D(z,y)/D(U,V)}{D(x,y)/D(U,V)} \qquad (4)$$

Del mismo modo obtendríamos:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{D(z,x)/D(U,V)}{D(x,y)/D(U,V)} \qquad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en la integral doble, efectuando en ella el cambio de variable:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(U,V) \\ y = y(U,V) \end{array} \right\} \qquad \text{queda:}$$

$$\text{Area} = \iint_{R'} \sqrt{1 + \left[\frac{D(z,y)/D(U,V)}{D(x,y)/D(U,V)}\right]^2 + \left[\frac{D(z,x)/D(U,V)}{D(x,y)/D(U,V)}\right]^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{D(x,y)}{D(U,V)} \cdot dU \cdot dV =$$

$$= \iint_{R'} \sqrt{\left[\frac{D(x,y)}{D(U,V)}\right]^2 + \left[\frac{D(y,z)}{D(U,V)}\right]^2 + \left[\frac{D(z,x)}{D(U,V)}\right]^2} \; dU \cdot dV \qquad (6)$$

siendo R' el dominio del plano UV correspondiente al R.

Efectuando operaciones en (6), podríamos también escribir la expresión del área de la siguiente forma:

$$A = \iint_{R'} \sqrt{E.G-F^2} \cdot dU \cdot dV$$

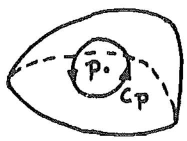
siendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \left(\frac{\partial x}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial U}\right)^2 \\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial V}\right)^2 \\ F = \frac{\partial x}{\partial U} \cdot \frac{\partial x}{\partial V} + \frac{\partial y}{\partial U} \cdot \frac{\partial y}{\partial V} + \frac{\partial z}{\partial U} \cdot \frac{\partial z}{\partial V} \end{array} \right.$$

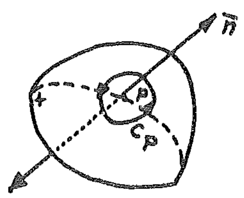
3.- Concepto de integral de superficie.-

Hagamos en primer lugar unas consideraciones intuitivas acerca de la "orientación" de superficies.

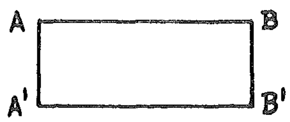
Consideremos un casquete de superficie. En un punto P de ella podemos fijar un sentido de rotación mediante un pequeño ciclo orientado C_p que rodee al punto P. Si ese pequeño ciclo lo movemos de manera continua sobre la superficie, se puede asociar a cada punto de la misma un sentido de rotación, si ocurre que no pueda llegarse a ningún punto Q con un ciclo y con su opuesto. En tal caso la superficie se dice orientable.



Para cada superficie orientable se puede hablar de sus dos caras, asociadas con las dos seminormales en cada punto. Fijada la orientación del ciclo C_p, consideremos la seminormal que contiene el vector $\vec{n}$ desde cuyo extremo se vea recorrer el ciclo C_p, dejando su interior a la izquierda. Diremos que la cara asociada a ese vector $\vec{n}$ es la cara positiva, mientras que la cara asociada a la otra seminormal es la cara negativa.



No todas las superficies son orientables ó de dos caras. El ejemplo más sencillo de superficie no orientable o de una sola cara es el de la banda de Moebius, que puede construirse con una tira de papel rectangular como la de la figura, uniendo el punto A con B' y el B con A'.

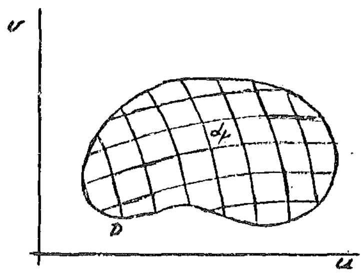


Conviene advertir que si bien en el espacio euclídeo E_3, coinciden los conceptos de "orientabilidad" y "bilateralidad" de superficies no ocurre lo mismo en otros espacios, donde pueden existir superficies orientables, pero que tengan una sola cara. El estudio profundo de estas cuestiones se hace en Topología.

El concepto de integral de superficie que vamos a establecer, se entenderá referido a la cara positiva de una superficie de dos hojas.

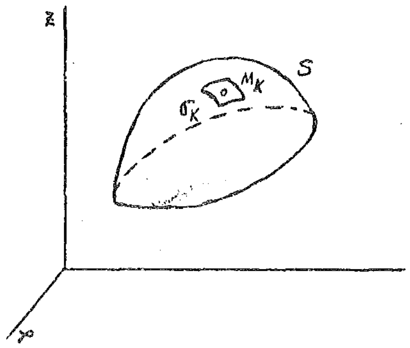
Consideremos un casquete S de superficie, que tenga área, definido en forma paramétrica por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \qquad (1)$$



donde los segundos miembros son funciones continuas y con derivadas parciales continuas en el dominio D, de modo que cuando el punto de coordenadas (u, v) describe el dominio D, se obtiene el casquete S.

Si se descompone el casquete S en porciones más pequeñas, eso equivaldrá a descomponer el dominio D, en las partes homólogas. Sean σ_1, σ_2, ... , σ_n las áreas de las porciones de S.



Consideremos una función f(x, y, z) continua en los puntos de S; resultará ser, también, una función continua del punto (u, v) de D.

Sea M_k un punto tomado arbitrariamente en la porción σ_k. Formemos la suma:

$$\sum_{1}^{n} f(M_k) \cdot \sigma_k \quad \text{que puede escribirse} \qquad (2)$$

$$\sum_{1}^{n} f(M_k) \cdot \iint_{d_k} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv \qquad (3)$$

donde

$$A = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \quad,, \quad B = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \quad,, \quad C = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$$

Por el teorema de la media, la integral doble que aparece en (3) es igual a $F(u'_k, v'_k)\,\omega_k$ donde ω_k es el área de la parcela d_k, y F es el integrando; (u'_k, v'_k) es un punto de d_k. Luego (3) puede ponerse:

$$\sum_{1}^{n} f(u_k, v_k) \cdot F(u'_k, v'_k) \cdot \omega_k \qquad (4)$$

Si fuera $u'_k = u_k$, $v'_k = v_k$ la suma (4) tendría límite al tender a cero el mayor de los diámetros de las parcelas d_k, límite que valdría

$$\iint_D f(u,v) \cdot F(u,v) \cdot du\, dv \qquad (5)$$

Vamos a ver que, en todo caso, la suma (4) tiene como límite (5). En efecto sea M'_k el punto de S que corresponde al punto (u'_k, v'_k) de la parcela d_k; es claro que M'_k pertenece junto con M_k a la porción de S de área σ_k. La diferencia

$$\sum_{1}^{n} f(M_k)\,\sigma_k - \sum_{1}^{n} f(M'_k)\,\sigma_k = \sum_{1}^{n} [f(M_k) - f(M'_k)]\,\sigma_k$$

tiende hacia cero cuando las áreas σ_k tienden hacia cero, ya que en virtud de la continuidad uniforme de la función f, se cumple $|f(M_k) - f(M'_k)| < \varepsilon$ en cuanto los números σ_k sean suficientemente pequeños.

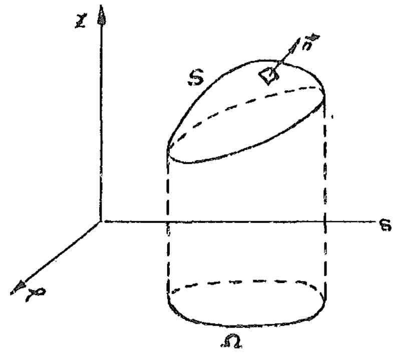
El límite de la suma (2) existe, por lo tanto, en las condiciones indicadas y está dado por la integral (5). Dicho límite se llama "integral de la función f(x, y, z) sobre la superficie S", ó más brevemente "integral de superficie", y se la designa con la notación $\iint_S f(x,y,z)\,.\,d\sigma$.

Calculada la integral de superficie extendida a una cara de un casquete, convendremos en que su valor extendido a la otra cara es el anterior cambiado de signo.

Aplicación práctica. -

El cálculo efectivo de las integrales de superficie, no siempre se hace utilizando unas coordenadas curvilíneas cualesquiera, sino que es frecuente emplear las propias coordenadas cartesianas.

Así por ejemplo, para calcular $\iint_S f(x,y,z).d\sigma$ extendida a la cara señalada con la seminormal $\vec{n}$, proyectemos el casquete S sobre el plano coordenado x'y, obteniéndose el dominio Ω. Si la superficie S viene definida por la función uniforme $z = \varphi(x,y)$, la integral (5) se escribe ahora



$$\iint_\Omega f[x,y,\varphi(x,y)] . \frac{dx\ dy}{\cos\gamma} \tag{6}$$

ya que se ha considerado la representación paramétrica

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \varphi(x,y) \end{cases}$$

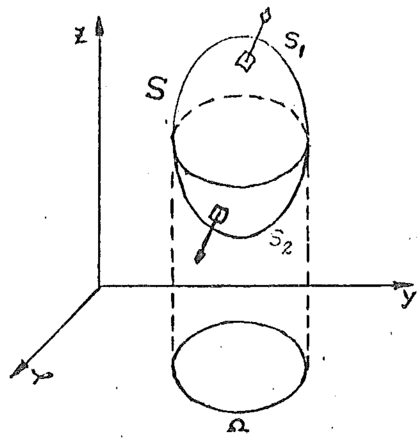
equivalente a tomar como parámetros $\underline{u}$, $\underline{v}$ las coordenadas cartesianas $\underline{x}$, $\underline{y}$. (recuérdese la expresión del elemento de área en coordenadas curvilíneas).

Prácticamente lo que hemos hecho es sustituir $\underline{z}$ por la coordenada $\underline{z}$ de la superficie y $d\sigma$ por $dx\ dy/\cos\gamma$.

Será conveniente, sin embargo, hacer algunas precisiones acerca del signo de $\cos\gamma$ en los diversos casos que pueden presentarse.

a) Sea el caso de la integral de superficie $\iint_S f(x,y,z)d\sigma$ donde S es una superficie cerrada, que se puede descomponer en la porción S_1 cuya ecuación es $z = \varphi_1(x,y)$ y la porción S_2 cuya ecuación es $z = \varphi_2(x,y)$. Es claro que $\iint_S =$

$$= \iint_{S_1} + \iint_{S_2}.$$



Pero según (6),

$$\iint_{S_1} = \iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi_1(x, y)]\ \frac{dx\ dy}{\cos\gamma}$$

donde cos γ es positivo.

En cambio sobre la porción S_2, cos γ es negativo; por ello se habrá de sustituir $d\sigma$ por la expresión $-\dfrac{dxdy}{\cos\gamma}$; el signo - se pone para compensar el signo - de cos γ . Por ello resulta, en resumen,

$$\iint_{S} = \iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi_1(x, y)].\ \frac{dx\ dy}{\cos\gamma} -$$

$$- \iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi_2(x, y)].\ \frac{dx\ dy}{\cos\gamma} \tag{7}$$

entendiéndose que el cos γ del minuendo se refiere a la superficie S_1, y el cos γ del sustraendo se refiere a S_2.

b) Consideremos ahora el caso de la integral de superficie $\iint_S$ f(x, y, z). . dx dy donde S es la misma superficie del caso a).

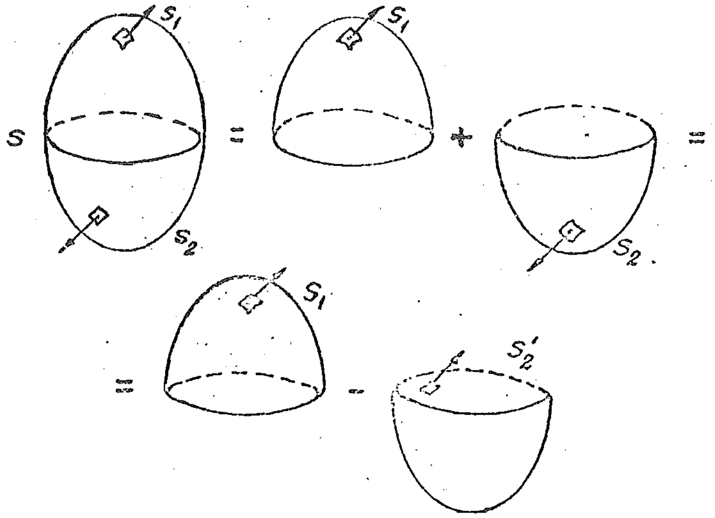
El significado de esta integral es el de $\iint_S$ f(x, y, z). cos γ . $d\sigma$ que, según lo dicho en el caso a) se debe calcular por la fórmula (7), resultando:

$$\iint_{S} = \iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi_1(x, y)]\cos\gamma .\ \frac{dx\ dy}{\cos\gamma} -$$

$$- \iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi_2(x, y)]\cos\gamma\ .\ \frac{dx\ dy}{c_{-}s\ \gamma} = \qquad 8)$$

$$= \iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi_1(x, y)]\ dx\ dy - \iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi_2(x, y)]\ dx\ dy \qquad (8)$$

Gráficamente, se puede ver así:



donde hemos llamado S'_2 a la cara "interior" del casquete cuya cara "exterior" es S_2. En símbolos

$$\iint_{S} = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = \iint_{S_1} - \iint_{S'_2} =$$

$$= \iint_{\Omega} f\,[x, y, \varphi_1(x, y)].\ dx\ dy - \iint_{\Omega} \varphi[x, y, \varphi_2(x, y)].\ dx\ dy$$

EJEMPLO:

Calcular $\iint_S \frac{dx\ dy}{z}$ extendida a la cara exterior de la superficie esfé rica $x^2+y^2+z^2 = r^2$.

Según la fórmula (8) se tendrá:

$$I = \iint_{\Omega} \frac{dx\ dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} - \iint_{\Omega} \frac{dx\ dy}{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}} =$$

$$= 2\iint_{\Omega} \frac{dx\ dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

donde Ω es el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ del plano OXY.

Pasando a coordenadas polares resulta:

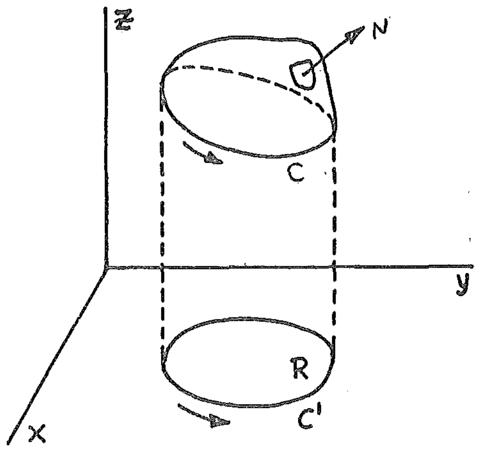
$$I = 2 \iint_{\Omega} \frac{\varrho\, d\varrho\, d\omega}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}} = 2 \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^r \frac{\varrho}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}} = 2.2\pi.(-\sqrt{r^2 - \varrho^2})_0^r = 4\,\pi\, r$$

4.- Teorema de Stokes.-

Consideremos la superficie uniforme $z = z(x,y)$, orientable, y un casquete de ella de área σ que está limitado por una línea C que se proyecta sobre el plano xy según otra línea C' sin puntos múltiples.

Supongamos que todos los puntos del casquete de área σ pertenecen a un cierto dominio espacial V, en el que se ha definido una función $X(x,y,z)$ continua y con derivadas parciales continuas. Vamos a calcular la siguiente integral curvilínea a lo largo de la línea C,

$$\int_C X(x,y,z)dx$$



Los puntos de la línea C, verifican $z = z(x,y)$, siendo (x,y) puntos pertenecientes a la línea C' proyección de C sobre xy, luego:

$$\int_C X(x,y,z)dx = \int_{C'} X[x,\ y,\ z(x,y)]\, dx$$

Aplicando el teorema de Riemann quedará:

$$\int_{C'} X\,[x,y,z(x,y)]\,dx = -\iint_R \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right).dxdy$$

Entendiendo que la integral curvilínea a lo largo de C' está recorrida en el sentido en que deje al dominio R a su izquierda para un observador situado según el eje +OZ, y por ello se ha de recorrer C en un sentido tal que deje a la izquierda la cara superior para un observador situado según la seminormal a dicha cara.

Por otro lado, en función de la superficie $z = z(x,y)$, sabemos que $d\sigma = \frac{dxdy}{\cos\gamma}$, y, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$, sustituyendo en la integral quedará,

$$\int_C X(x,y,z)dx = -\iint_\sigma \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right).\cos\gamma\,.\,d\sigma = \iint_\sigma \left(\frac{\partial X}{\partial z}.\cos\beta - \frac{\partial X}{\partial y}.\cos\gamma\right).\,d\sigma \qquad (1)$$

Si consideramos otras dos funciones $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ que cumplan las mismas condiciones exigidas anteriormente para $X(x,y,z)$, se podrá poner permutando simplemente las ternas (x,y,z) y (X,Y,Z), las fórmulas:

$$\int_C Y(x,y,z).dy = \iint_\sigma \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Y}{\partial z}\cos\alpha\right).d\sigma \qquad (2)$$

$$\int_C Z(x,y,z)dz = \iint_\sigma \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial Z}{\partial x}.\cos\beta\right).d\sigma \qquad (3)$$

Sumando (1), (2) y (3) quedará:

$$\int_C X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz =$$

$$= \iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right).\cos\alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\gamma\right].d\sigma =$$

$$= \iint_\sigma \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy$$

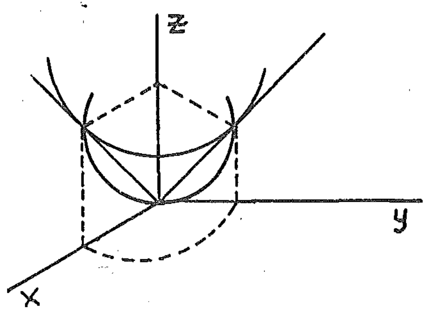
Esta es pues la fórmula debida a Stokes y permite transformar la integral curvilínea de una función extendida a una curva cerrada C en la integral de superficie extendida al casquete σ cuyo contorno es C.

Se ve nuevamente que la condición para que la integral curvilínea a lo largo de una línea cerrada sea nula es que sean iguales las derivadas cruzadas,

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

5. EJEMPLOS

5.1.- Hallar el área de la superficie del paraboloide $2z = x^2 + y^2$, que es exterior al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



la intersección de ambas superficies nos da las líneas,

$$z^2 = 2z \quad \begin{cases} z = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Para $z = 2$, la línea es:

$$\left\{ \begin{array}{r} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{array} \right\}$$

En la superficie $2z = x^2 + y^2$, $z'x = x$, $z'y = y$

$A = \iint_S \sqrt{1 + z'x^2 + z'y^2}.dx.dy = 4 \iint_R \sqrt{1 + x^2 + y^2}$. dxdy, pasando a polares $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$, $J = \varrho$.

$$A = 4 \iint_{R'} \sqrt{1+ \varrho^2} \,.\, \varrho.d\,\varrho.d\vartheta = 4 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \left| \frac{(1+ \varrho^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}.2} \right|_0^2 =$$

$$= \frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 1)$$

5.2.- Calcular la integral de superficie $\iint_S xy.d\sigma$, extendida a la parte de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, en la que $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

En esféricas, la esfera tiene de ecuaciones $\begin{cases} x = R\ \mathrm{sen}\,\vartheta\cos\varphi \\ y = R\ \mathrm{sen}\,\vartheta\ \mathrm{sen}\ \varphi \\ z = R\ \cos\varphi \end{cases}$

$$d\sigma = \frac{dxdy}{\cos\gamma} = \sqrt{1+z'x^2 + z'y^2}\, dxdy = \frac{R}{z}\, dxdy$$

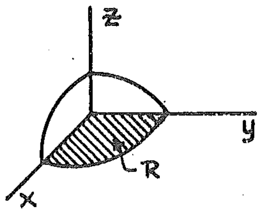
$$I = \iint_S xy\, d\sigma = \iint_S \frac{xy}{z}\, dxdy = R \iint_{R'} \frac{R^2 \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi \,.\, \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi}{R \cos\varphi} . R^2 \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta . d\varphi d\vartheta =$$

$$= R^4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi . \cos\varphi\, d\varphi = \frac{R^4}{3}$$

5.3.- Calcular la integral de superficie

$$\iint_S \frac{d\sigma}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

extendida a la superficie del primer octante del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



En el elipsoide se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a^2} + \frac{zz'_x}{c^2} = 0 \\ \\ \frac{y}{b^2} + \frac{zz'_y}{c^2} = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} z'_x = - \frac{c^2}{a^2} . \frac{x}{z} \\ \\ z'_y = - \frac{c^2}{b^2} . \frac{y}{z} \end{array}$$

$$d\sigma = \sqrt{1+z'x^2+z'y^2}\, dx\, dy = \sqrt{1+ \frac{c^4}{a^4} \frac{x^2}{z^2} + \frac{c^4}{b^4} \frac{y^2}{z^2}}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{c^2}{z} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\, dxdy$$

$$I = \iint_S \frac{d\sigma}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}} = \iint_R \frac{c^2}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\, dx\, dy =$$

$$= C. \iint_R \frac{dx\ dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

pasando a paramétricas:

$$\begin{cases} x = a.\ \rho . \cos \vartheta \\ y = b.\ \rho \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$$

$$I = C \iint_{R'} \frac{ab\rho\ . d\rho\ . d\vartheta}{\sqrt{1 - \rho^2}} = abc \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1 - p^2}} = \frac{\pi abc}{2}$$

5.4.- Sea S una porción de superficie orientada limitada por una curva cerrada C, se pide:

1º.- Transformar en integral curvilínea la integral de superficie:

$$I = \iint_S [x(z^2 - y^2)\cos\alpha + y(x^2 - z^2)\cos\beta + z(y^2 - x^2)\cos\gamma] \ . dS$$

2º.- Calcular I cuando S es la porción del plano x = 1, definida por $y^2 + z^2 \leqslant 1$, $y + z \geqslant 0$, $z - y \geqslant 0$.

$$\int_C Xdx + Ydy + Zdz = \iint_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dy\ dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\ dy$$

en nuestro caso:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \frac{\partial Y}{\partial z} &= xz^2 - xy^2 \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} &= yx^2 - yz^2 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= zy^2 - zx^2 \end{aligned}\right\} \text{podemos hacer} \left\{\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial y} &= xz^2, & \frac{\partial Y}{\partial z} &= xy^2 \\ \frac{\partial X}{\partial z} &= yx^2, & \frac{\partial Z}{\partial x} &= yz^2 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} &= zy^2, & \frac{\partial X}{\partial y} &= zx^2 \end{aligned}\right.$$

ó sea $\begin{cases} X = x^2 yz \\ Y = y^2\ xz \\ Z = z^2\ xy \end{cases}$ y la integral de superficie quedará así

$$I = \int_C xyz\ (xdx + ydy + zdz)$$

Para la segunda parte, en el círculo del plano

$$x = 1 \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

y la integral de superficie quedará:

$$I = \iint_S (z^2 - y^2).dS \qquad \begin{Bmatrix} y = \varrho \cos \vartheta \\ z = \varrho \operatorname{sen} \vartheta \end{Bmatrix}$$

$$I = \iint_{R'} \varrho^2(\operatorname{sen}^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta).\ \varrho . d\varrho . d\vartheta =$$

$$= \int_0^1 \varrho^3 . d\varrho \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (-\cos 2\vartheta)d\vartheta = \frac{1}{4}$$

Podríamos haber calculado esta última integral utilizando la curvilínea deducida anteriormente y así quedaría:

$$I = \int_C = \int_{C_{(\text{círculo})}} + \int_{C_{(y=z)}} + \int_{C_{(y=-z)}} = I_1+I_2+I_3$$

sobre el círculo:

$$I_1 = \int_{C_1} xyz(xdx+ydy+zdz) = \int_{C_1} xyz . \frac{d\varrho^2}{2}, \text{ siendo } \varrho^2 = x^2+y^2+z^2$$

como ϱ = cte. $d\varrho^2 = 0$ e $I_1 = 0$.

Sobre el segmento de $y = z$.

$$I_2 = \int_{C_2} 2y^3dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} 2y^3dy = \frac{1}{8}$$

Sobre el segmento de $y = -z$

$$I_3 = \int_{C_3} -2y^3dy = -\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} (2y^3)dy = \frac{1}{8}$$

$$I = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

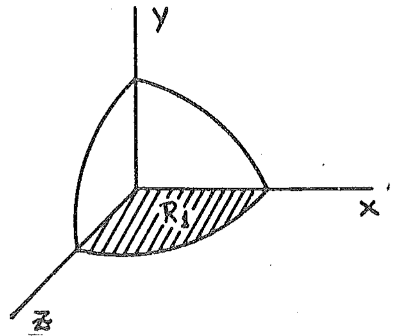
5.5.- Calcular la integral de superficie

$$I = \iint_S \frac{xz^2dxdy + x^2ydxdz + yzdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

extendida a la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

como $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ en la esfera, se tendrá:

$$I = \frac{1}{R^3} \iint_S xz^2 \, dx\,dy + \frac{1}{R^3} \iint_S x^2ydxdz + \frac{1}{R^3} \iint_S yzdydz$$



la primera y la última se anulan en toda la superficie, mientras que la segunda se duplica en la semiesfera superior; la transformamos en doble en el primer octante:

$$I = \frac{2}{R^3} \iint_{S_1} x^2ydxdz = \frac{8}{R^3} \iint_{R_1} x^2. \sqrt{R^2-x^2-z^2}\, dx\, dz$$

pasando a polares

$$\left\{ \begin{array}{l} x = R.\,\varrho\,.\cos\vartheta \\ z = R.\,\varrho\,.\operatorname{sen}\vartheta \end{array} \right\} \quad J = R^2.\,\varrho$$

$$I = \frac{8}{R^3} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^1 R^2\,\varrho^2.\cos^2\vartheta \quad \sqrt{R^2(1-\varrho^2)}.R^2.\,\varrho.d\varrho =$$

$$= 8R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta\, d\vartheta \int_0^1 \varrho^3 \sqrt{1-\varrho^2}.d\varrho = \frac{4\pi R^2}{15}$$

7

Integrales Triples

LECCION 7

INTEGRALES TRIPLES

1.- Concepto de integral triple.-

Al estudiar la integral doble en la lección 5, ya se indicó la posible generalización del concepto de integral de Riemann para una región n-dimensional y se desarrolló para $n = 2$, obteniéndose así la integral doble.

De manera análoga, para $n = 3$ se obtendrá la integral triple, que podemos definir como a continuación se expone.

Consideremos la función $U = f(x, y, z)$, definida y acotada en todos los puntos de un cierto dominio espacial V, limitado por una superficie cerrada S.

Dividimos arbitrariamente el dominio V en dominios parciales que llamaremos celdas, representando dichos dominios, así como sus volúmenes por:

$$\Delta V_1, \quad \Delta V_2, \quad \ldots , \quad \Delta V_k, \quad \ldots , \quad \Delta V_m$$

En cada uno de estas celdas, elegimos un punto arbitrario $p_k \in \Delta V_k$, y formamos la suma de los valores de la función f en cada uno de esos puntos, por el volumen de la celda considerada, llamando a esta expresión "suma integral":

$$\sum_{k=1}^{m} f(p_k)\, \Delta V_k = f(p_1) . \ \Delta V_1 + f(p_2) . \ \Delta V_2 + \ldots +$$

$$+ f(p_m) . \ \Delta V_m = S_{m_1}$$

Volvemos a dividir el dominio V, y consideramos el conjunto formado por las divisiones antiguas y las nuevas, obteniéndose m' celdas ($m' \geqslant m$), y otra nueva suma integral:

$$\sum_{k=1}^{m'} f(p'_k) . \ \Delta V'_k = S_{m_2}$$

Repetimos n veces este proceso, exigiendo que el volumen de cada celda tienda a cero, cuando $n \to \infty$, obteniéndose una sucesión de sumas integrales:

$$S_{m_1}, \ S_{m_2}, \ \ldots , \ S_{m_n}, \ \ldots$$

Decimos que existe la integral triple según Riemann de $f(x,y,z)$ en V y la representamos por L, si dado un número $\varepsilon > 0$ y arbitrario, se puede encontrar un valor p, tal que para $n \geqslant p$ se tenga $|S_{m_n} - L| < \varepsilon$, cualquiera que sean los puntos p_k elegidos en cada celda.

Este límite se llama integral triple de la función $f(x,y,z)$ extendida al dominio V y se representa así:

$$L = \iiint_V f(p).dV = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(p_k).\Delta V_k$$

Si llamamos M_k y m_k a los extremos superior e inferior de la función $f(x,y,z)$ en cada celda ΔV_k, y formamos las sumas:

$$\sum_{k=1}^{n} M_k.\ \Delta V_k = M_1.\ \Delta V_1 + \ldots + M_n.\ \Delta V_n = S_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k.\ \Delta V_k = m_1.\ \Delta V_1 + \ldots + m_n.\ \Delta V_n = s_n$$

como $m_k \leqslant f(p_k) \leqslant M_k$, se tendrá:

$$\sum m_k.\ \Delta V_k \leqslant \sum f(p_k).\ \Delta V_k \leqslant \sum M_k\ .\ \Delta V_k$$

$$s_n \leqslant S_{m_n} \leqslant S_n \quad ; \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ p,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

Si las sucesiones así formadas s_n y S_n, cumplen la condición de que dado un $\varepsilon > 0$ y arbitrario, se puede encontrar un valor p, tal que para $n \geqslant p$, se verifique $|S_n - s_n| < \varepsilon$, tendrán ambas igual límite que coincidirá con el de la sucesión S_{m_n} y se tendrá pues:

$$s_n < \iiint_V f(x,y,z).dV < S_n$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n} f(p_k).\ \Delta V_k = \iiint_V f(x,y,z).dV$$

Puede observarse que este concepto es idéntico al de integral doble, sustituyendo dominio plano R por dominio espacial V, parcela por celda, área por volumen e integral doble por integral triple.

Del mismo modo que en la doble podríamos demostrar que si la función $f(x, y, z)$ es continua en el dominio V es integrable en él. Asimismo $f(x, y, z)$ es también integrable si es acotada con puntos de discontinuidad aislados ó situados en curvas o superficies que pueden encerrarse en dominios de volumen tan pequeño como se quiera.

2.- Propiedades de la integral triple.-

Son las mismas que las de las dobles y que podremos resumir a continuación, omitiendo la demostración que sería idéntica a la que se realizó en las dobles:

a) Propiedad aditiva del integrando:

$$\iiint_V [\varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) + \ldots + \varphi_p(x, y, z)]\, dV =$$

$$= \iiint_V \varphi_1(x, y, z)dV + \ldots + \iiint_V \varphi_p(x, y, z) . dV$$

b) Linealidad:

$$\iiint_V k . f(x, y, z)dV = k \iiint_V f(x, y, z)dV$$

c) Propiedad aditiva del dominio de integración:

Si es $V = V' + V''$, se tiene:

$$\iiint_V f(x, y, z)dV = \iiint_{V'} f(x, y, z)dV + \iiint_{V''} f(x, y, z)dV$$

d) Acotación

Si es $f(x, y, z) \leqslant \varphi(x, y, z)$ en V, se tiene:

$$\iiint_V f(x, y, z)dV \leqslant \iiint_V \varphi(x, y, z)dV$$

e) Acotación modular

Si es $|f(x, y, z)| < M$ en V, se tiene

$$\left| \iiint_V f(x, y, z)dV \right| < M \cdot V$$

Siendo V el volumen encerrado en el dominio.

f) Teorema de la media

Si es $f(x, y, z)$ continua en V, existe un punto al menos $(x_0, y_0, z_0) \in V$, tal que:

$$\iiint_V f(x, y, z)dV = f(x_0, y_0, z_0) \cdot V$$

siendo V el volumen encerrado en el dominio.

3.- Cálculo de volúmenes utilizando integrales triples.-

Si queremos calcular el volumen encerrado en un dominio espacial V, limitado por una curva cerrada S, basta con que apliquemos el concepto de integral triple a la función $U = f(x, y, z) = 1$, con lo que quedaría:

$$f(p_k) = 1,$$

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(p_k) \cdot \Delta V_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k$$

pero ese límite viene dado por la siguiente integral triple y se tendrá:

$$V = \iiint_V dV$$

4.- Generalización del concepto de integral triple.-

En la definición de integral triple, se ha considerado una función $f(x, y, z)$ acotada, en un dominio espacial V, limitado por una superficie cerrada S. Vamos a extender la definición de integral triple para los casos de funciones no acotadas y de dominios ilimitados.

Si la función $f(x, y, z)$ se hace infinita en algún punto A del dominio V dado, rodeamos A con un entorno esférico E de radio ε y se calcula la integral triple en el dominio resultante al quitar a V dicha esfera (V-E). Si existe el límite de esta integral cuando ε tiende a cero, le llamamos, por definición, integral triple de $f(x, y, z)$ en V.

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint_{V-E} f(x,y,z).dV$$

Si existe un número finito de puntos A_1, A_2, ... , A_p, iguales al A considerando, hacemos con cada uno de ellos lo mismo y escribiremos:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint_{V-E} f(x,y,z)dV$$

siendo $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_p$, el dominio constituido por las p esferas de igual radio ε.

Si el dominio V es limitado, se razonará igual a como se hizo en las integrales dobles.

5.- Cálculo de la integral triple en el dominio encerrado por un paralelepípedo de planos paralelos a los coordenados.-

Sea la función $f(x,y,z)$ continua en el dominio V, limitado por los planos $x = a_1$, $x = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$, $z = c_1$, $z = c_2$. Dividimos el dominio V por planos paralelos a los coordenados, obteniéndose celdas constituidos por paralelepípedos elementales; la integral triple será el límite de la siguiente expresión:

$$\sum_j \sum_k \sum_l f(x_j, y_k, z_l)\,\Delta x_j.\,\Delta y_k.\,\Delta z_l = \sum_j \sum_k \Delta x_j.\,\Delta y_k \sum_l f(x_j, y_k, z_l).\,\Delta z_l \qquad (1)$$

Recordando la expresión de la integral de una función continua de un parámetro como límite uniforme de una suma (Lección 2), se tiene que la última suma tiende uniformemente a la integral

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x_j, y_k, z)dz$$

o sea:

$$\sum_l f(x_j, y_k, z_l).\Delta z_l = \int_{c_1}^{c_2} f(x_j, y_k, z).dz + \delta_{jk}$$

y cumpliéndose: $|\delta_{jk}| < \varepsilon$, para todos los x_j, y_k, eligiendo Δz_l suficientemente pequeño.

Así pues, la expresión (1) quedará

$$\sum_j \sum_k \sum_l f(x_j, y_k, z_l) . \Delta x_j . \Delta y_k . \Delta z_l = \sum_j \sum_k . \Delta x_j . \Delta y_k \left[\int_{c_1}^{c_2} f(x_j, y_k, z) . dz + \delta_{jk} \right] =$$

$$= \sum_j \sum_k \Delta x_j . \Delta y_k . \int_{c_1}^{c_2} f(x_j, y_k, z) dz + \sum_j \sum_k \Delta x_j . \Delta y_k . \delta_{jk} \qquad (2)$$

El último sumando tiende a cero, cuando ε tiende a cero, ya que:

$$\sum_j \sum_k \Delta x_j \Delta y_k . \delta_{jk} < \varepsilon \sum_j \sum_k \Delta x_j . \Delta y_k = \varepsilon (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$$

Teniendo en cuenta, el cálculo de la integral doble en el dominio encerrado por un rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados, tomando límites cuando $\Delta x_j \to 0$, $\Delta y_k \to 0$, $\Delta z_l \to 0$, quedará:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{\substack{\Delta x_j \to 0 \\ \Delta y_k \to 0 \\ \Delta z_l \to 0}} \sum_j \sum_k \sum_l f(x_j, y_k, z_l) . \Delta x_j . \Delta y_k . \Delta z_l =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_j \to 0 \\ \Delta y_k \to 0}} \sum \sum \Delta x_j . \Delta y_k \int_{c_1}^{c_2} f(x_j, y_k, z) dz =$$

$$= \iint_R dx dy \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) dz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) dz$$

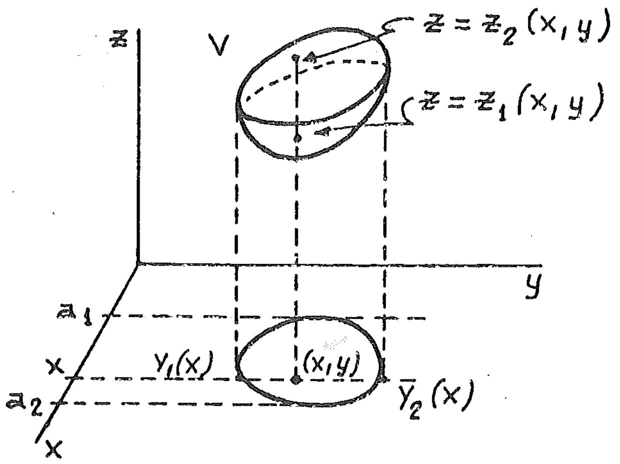
Lo mismo que en la doble, el orden de integración puede alterarse.

6.- Cálculo de la integral triple en un dominio no paralelepipédico.-

Sea el dominio V acotado, limitado por una superficie cerrada S, de ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$, que se proyecta en el plano xy según un dominio plano R.

Sean $z = z_1(x, y)$ y $z = z_2(x, y)$ las dos determinaciones de z obtenidas de la ecuación de la superficie $\varphi(x, y, z) = 0$, para cada valor (x, y) de R. Queremos calcular la integral triple de una función continua $f(x, y, z)$ en el dominio V.

Circunscribimos a la superficie S, un paralelepípedo P de planos paralelos a los coordenados y atribuimos a $f(x, y, z)$ el valor cero en el exterior de V.



Aplicando la fórmula obtenida en la pregunta anterior, se tendrá:

$$\iiint_V f(x, y, z)dV = \iiint_P f(x, y, z)dxdydz = \iint_R dxdy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz$$

Se podrían obtener expresiones similares cambiando el orden de integración.

La ecuación del contorno de R, se puede obtener eliminando z entre la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$ y $\partial\varphi/\partial z = 0$, lo que equivale a expresar que el plano tangente a la superficie S en los puntos de contorno aparente es perpendicular al plano $z = 0$.

7.- Teorema de Gauss ó Ostrogradski.-

Consideremos un dominio espacial V, limitado por una superficie cerrada S de ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$, siendo las funciones continuas $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$ las dos determinaciones de z correspondientes a cada valor de xy de un cierto dominio plano R, obtenido como proyección del dominio V sobre el plano xy.

Consideremos la función $Z(x, y, z)$ continua y con derivada continua respecto de z en todos los puntos de V. Consideremos la integral:

$$I = \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} \, dx.dy.dz$$

e integrémosla primeramente respecto de z

$$I = \iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} . dx. dy. dz = \iint_R dxdy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial Z}{\partial z} . dz = \iint_R Z \left[x, y, z_2(x, y)\right] dxdy \; -$$

$$- \iint_R Z \left[x, y, z_1(x, y)\right] dx. dy$$

Si consideramos la seminormal exterior a la superficie S y llamamos γ el ángulo que dicha recta forma con el eje $+ OZ$, $\cos\gamma$ será positivo en z_2 y negativo en z_1, y se tendrá:

$$\cos\gamma . d\sigma = dx \; dy$$

$$I = \iint_{S_1} Z\left[x, y, z_2(xy)\right] \cos\gamma . \, d\sigma + \iint_{S_2} Z\left[x, y, z_1(x, y)\right] \cos\gamma . d\sigma =$$

$$= \iint_S Z\left[x, y, z\right] . \cos\gamma \, . d\sigma = \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} \, dxdydz \qquad (1)$$

Esta fórmula iguala la integral triple extendida a un dominio V con la integral de superficie extendida a la cara exterior S de la superficie que encierra el dominio V.

De modo semejante obtendríamos las relaciones:

$$\iiint_V \frac{\partial Y(x, y, z)}{\partial y} . dxdydz = \iint_S Y(x, y, z) . \cos\beta . d\sigma \qquad (2)$$

$$\iiint_V \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial x} \, dxdydz = \iint_S X(x, y, z) . \cos\alpha \, . d\sigma \qquad (3)$$

Sumando (1), (2) y (3) se obtiene la fórmula de Gauss ó de Ostrogradski

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) . dxdydz = \iint_S \left[X . \cos\alpha + Y \cos\beta + Z . \cos\gamma\right] d\sigma \; (4)$$

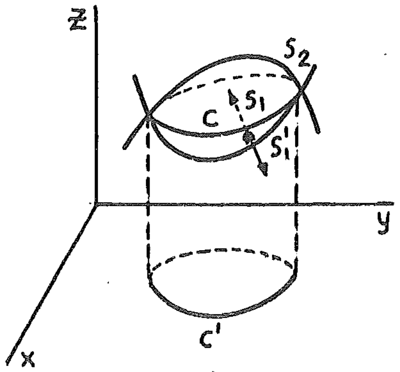
Esta fórmula es de gran interés en la teoría de campos, por transformar una integral de volumen en una integral doble sobre la superficie que limita dicho volumen.

Como consecuencia, se deduce que la condición necesaria y suficiente para que una integral de superficie

$$\iint_S (X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma)d\sigma$$

extendida a la cara exterior de una superficie S sea nula, cualquiera que sea dicha superficie, es que sea nula la función subintegral de la triple correspondiente a ella al aplicar la fórmula (4) de Gauss, o sea

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \qquad (5)$$



De otro modo, supongamos una línea C y dos superficies S_1 y S_2 uniformes y continuas que pasan por C y tienen de ecuación $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$ respectivamente. Sobre S_1 y S_2 se definen dos integrales de superficie

$$I_1 = \iint_{S_1} (Xdydz + Ydxdz + Zdxdy)$$

$$I_2 = \iint_{S_2} (Xdydz + Ydxdz + Zdxdy)$$

La condición para que la integral de superficie no dependa del casquete, sino sólo de su contorno C, es que cualquiera que sean S_1 y S_2 se tenga $I_1 = I_2$, $I_2 - I_1 = 0$, pero

$$I_2 - I_1 = \iint_{S_2} - \iint_{S_1} = \iint_{S_2} + \iint_{S'_1} = \iint_{S} = 0$$

lo que implica la misma condición (5) anterior.

A la expresión:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

se le llama divergencia del vector de componentes X, Y, Z.

8.- Cambio de variables en una integral triple.-

De acuerdo a los razonamientos ya expuestos cuando se estudió este problema en las integrales dobles, supongamos que queremos calcular $\iiint_V f(x, y, z)dxdydz$ siendo la función $f(x, y, z)$ continua en V, estando dicho dominio limitado por una superficie S cerrada, y queremos sustituir las variables x, y, z por otras nuevas u, v, w, relacionadas con ellas mediante las ecuaciones de transformación:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = a(u, v, w) \qquad (1)$$

siendo estas tres funciones uniformes, continuas y con derivadas continuas en todos los puntos del dominio V' transformado del V mediante dichas ecuaciones, cumpliéndose además que las ecuaciones (1) establecen una correspondencia biunívoca entre los dominios V y V'.

De igual modo que en las integrales dobles, se puede demostrar la siguiente fórmula:

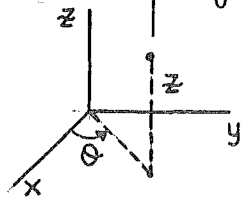
$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{V'} f\,[\,x(u, v, w), \; y(u, v, w), \; z(u, v, w)\,] \cdot \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| du.dv.dw$$

siendo:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Cuando se trate de coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z = z \end{cases}, \qquad \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\vartheta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

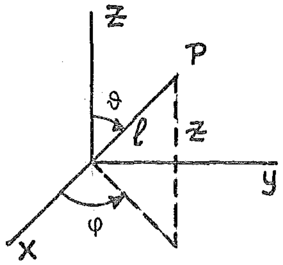


Si son coordenadas esféricas (fig. 1)

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\,.\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,.\cos\varphi \\ y &= \rho\,.\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,.\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z &= \rho\,.\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \qquad \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\vartheta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \mathrm{sen}\,\vartheta\cos\varphi & \rho\cos\vartheta\cos\varphi & -\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ \mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi & \rho\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi & \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

Fig. 1



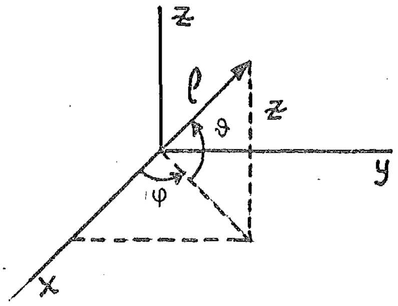


Fig. 2

Si los ángulos los hemos tomado como en la Fig. 2, las ecuaciones serían

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\vartheta\,.\,\cos\varphi \\ y &= \rho\cos\vartheta\,.\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z &= \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{aligned}\right\} \text{ y el jacobiano quedaría } \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\vartheta,\varphi)} = \rho^2.\cos\vartheta$$

9.- Fórmulas de Dirichlet.-

Consideremos la función $f(x,y,z) = x^{p-1},\ y^{q-1},\ z^{r-1}$ ($p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $r \geqslant 0$), de la queremos hallar su integral triple en el dominio V limitado por las superficies $(\frac{x}{a})^{\alpha} + (\frac{y}{b})^{\beta} + (\frac{z}{c})^{\gamma} \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. O sea queremos hallar en V la siguiente integral triple:

$$I = \iiint_V x^{p-1},\ y^{q-1},\ z^{r-1}\,dx\,dy\,dz \qquad (1)$$

Efectuemos el cambio de variable

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^{\alpha} = u \\ \left(\dfrac{y}{b}\right)^{\beta} = v \\ \left(\dfrac{z}{c}\right)^{\gamma} = w \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = a.u^{\frac{1}{\alpha}} \\ y = b.v^{\frac{1}{\beta}} \\ z = c.w^{\frac{1}{\gamma}} \end{array}\right\} \qquad \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{a}{\alpha}.u^{\frac{1}{\alpha}-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{\beta}.v^{\frac{1}{\beta}-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{\gamma}.w^{\frac{1}{\gamma}-1} \end{vmatrix} =$$

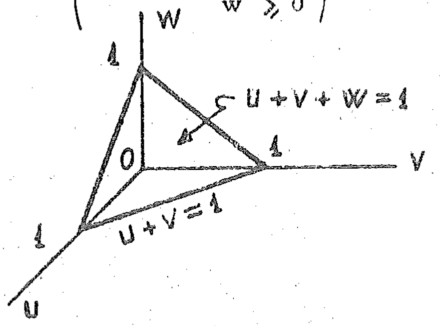
$$= \frac{abc}{\alpha\beta\gamma}.\ u^{\frac{1}{\alpha}-1}.v^{\frac{1}{\beta}-1}.\ w^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

La integral (1) quedará pues:

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma}.\iiint_{V'} u^{\frac{p}{\alpha}-1},\ v^{\frac{q}{\beta}-1},\ w^{\frac{r}{\gamma}-1}.dudvdw$$

estando V' limitado por

$$\begin{cases} u + v + w \leqslant 1 \\ u \geqslant 0 \\ v \geqslant 0 \\ w \geqslant 0 \end{cases}$$



$$I = \frac{abc}{\alpha\beta\gamma}.\int_0^1 u^{\frac{p}{\alpha}-1}du\int_0^{1-u} v^{\frac{q}{\beta}-1}dv\int_0^{1-u-v} w^{\frac{r}{\gamma}-1}.dw$$

Recordemos que

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

haciendo en ella $x = t/m$ queda

$$\beta(p,q) = \int_0^m \frac{t^{p-1}}{m^{p-1}}.\left(1-\frac{t}{m}\right)^{q-1}.\ \frac{dt}{m} = \frac{1}{m^{p+q-1}} \int_0^m t^{p-1}(m-t)^{q-1}\, dt$$

o sea:

$$\int_0^m t^{p-1}(m-t)^{q-1} dt = m^{p+q-1}.\ \beta(p,q) = m^{p+q-1}\ \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (3)$$

Vamos a aplicar (3) al cálculo de (2), considerando $m = 1-u$

$$I = \frac{a^p.b^q.c^r}{\alpha\ \beta\ \gamma} \int_0^1 u^{\frac{p}{\alpha}-1} du \int_0^{1-u} \frac{v^{\frac{q}{\beta}-1}\left[(1-u)-v\right]^{\frac{r}{\gamma}}}{\frac{r}{\gamma}}\, dv =$$

$$= \frac{a^p.b^q.c^r}{\alpha\ \beta\ \gamma}.\frac{\gamma}{r}. \int_0^1 u^{\frac{p}{\alpha}-1}.du.(1-u)^{\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}}.\ \frac{\Gamma(\frac{q}{\beta})\ \Gamma(\frac{r}{\gamma}+1)}{\Gamma(\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1)} =$$

$$= \frac{a^p.b^q.c^r}{\alpha\ \beta\ \gamma}.\frac{\gamma}{r}.\ \frac{\Gamma(\frac{q}{\beta}).\ \frac{r}{\gamma}.\ \Gamma(\frac{r}{\gamma})}{\Gamma(\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1)} \int_0^1 u^{\frac{p}{\alpha}-1}.(1-u)^{\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}}.\ du =$$

$$= \frac{a^p.b^q.c^r}{\alpha\ \beta\ \gamma}.\ \frac{\Gamma(\frac{q}{\beta}).\Gamma(\frac{r}{\gamma})}{\Gamma(\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1)}.\ \frac{\Gamma(\frac{p}{\alpha}).\ \Gamma(\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1)}{\Gamma(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1)} =$$

$$= \frac{a^p.b^q.c^r}{\alpha\ \beta\ \gamma}.\ \frac{\Gamma(\frac{p}{\alpha})\,\Gamma(\frac{q}{\beta})\ \Gamma(\frac{r}{\gamma})}{\Gamma(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1)}$$

Esta fórmula de Dirichlet es de aplicación en numerosas integrales múltiples, extendidas en el interior de ciertos dominios (triángulos, esferas, tetraedros, etc).

10.- Centros de gravedad.-

El cálculo de centros de gravedad, es un tema que el alumno ha desarrollado en otras asignaturas, por lo que sólo citaremos las fórmulas más utilizadas que son un claro ejemplo de las integrales múltiples estudiadas.

Si tenemos una línea en el espacio de densidad ρ variable, las coordenadas de su c.d.g. vienen dadas por las relaciones:

$$x_g = \frac{\int_c x.\rho.ds}{\int_c \rho.ds} \; ; \; y_g = \frac{\int_c y.\rho.ds}{\int_c \rho \, ds} \; ; \; z_g = \frac{\int_c z.\rho.ds}{\int_c \rho.ds}$$

siendo las integrales que aparecen curvilíneas y ds un elemento de longitud sobre dicha línea.

Si es una superficie de densidad ρ variable, las integrales serán dobles y las coordenadas del c.d.g. serán:

$$x_g = \frac{\iint_s x.\rho.d\sigma}{\iint_s \rho.d\sigma} \; ; \; y_g = \frac{\iint_s y.\rho.d\sigma}{\iint_s \rho.d\sigma} \; ; \; z_g = \frac{\iint_s z.\rho.d\sigma}{\iint_s \rho.d\sigma}$$

Del mismo modo para un volumen se tendrá:

$$x_g = \frac{\iiint_v x.\rho.dv}{\iiint_v \rho.dv} \; ; \; y_g = \frac{\iiint_v y.\rho.dv}{\iiint_v \rho.dv} \; ; \; z_g = \frac{\iiint_v z.\rho.dv}{\iiint_v \rho.dv}$$

Si la línea, superficie ó volumen son homogéneas, será ρ constante, y se simplificarán las fórmulas apareciendo en el denominador la longitud, área ó volumen respectivamente de la figura considerada.

11.- Momentos de inercia.-

Por los mismos motivos que se citaron en la pregunta anterior, vamos a escribir exclusivamente las fórmulas que se utilizan.

Momentos de inercia de una línea con respecto a los planos coordenados:

$$I_{xy} = \int_c z^2.ds \; ; \; I_{xz} = \int_c y^2 \, ds \; ; \; I_{yz} = \int_c x^2 \, ds$$

Momentos de inercia de una superficie respecto de los planos coordenados:

$$I_{xy} = \iint_s z^2.d\sigma \qquad I_{xz} = \iint_s y^2 \, d\sigma \qquad I_{yz} = \iint_s x^2 \, d\sigma$$

Momentos de inercia de un volumen respecto de los planos coordenados

$$I_{xy} = \iiint_v z^2\, dv \qquad I_{xz} = \iiint_v y^2 dv \qquad I_{yz} = \iiint_v z^2\, dv$$

Momentos de inercia respecto de los ejes coordenados

$$I_x = I_{xz} + I_{xy} \qquad I_y = I_{xy} + I_{yz} \qquad I_z = I_{xz} + I_{yz}$$

Momento de inercia polar I_0 respecto del origen

$$I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$$

12.- Ejemplos

12.1.- Sea V el volumen encerrado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \text{ Calcular:}$$

$$I = \iiint_V x^2\, dx\, dy\, dz$$

$$I = \iiint_V x^2\, dx\, dy\, dz = \int_{-a}^{a} x^2\, dx \iint_R dy\, dz = \int_{-a}^{a} x^2 . S_R . dx$$

siendo S_R el área de la elipse obtenida al cortar al elipsoide con el plano x = constante; quedará pues

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1 \qquad \text{y el área será}$$

$$S_R = \pi\, b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \,.\, c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pi\, bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Luego tenemos:

$$I = \iiint_V x^2 dx\,dy\,dz = \pi\, b\, c \int_{-a}^{a} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{15}\, \pi\, a^3\, bc$$

12.2.- Volumen del sólido limitado por la esfera $\rho = 2a \cos\vartheta$ y el cono $\vartheta = \alpha$, donde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Discutir el caso $\alpha = \pi/2$.

$V = \iiint_v dxdydz$. Pasamos a esféricas:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi \\ y &= \rho \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi \\ z &= \rho \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \quad J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\vartheta,\varphi)} = \rho^2 \operatorname{sen}\vartheta$$

$$V = \iiint_{v'} \rho^2 \operatorname{sen}\vartheta . d\rho . d\varphi . d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2a\cos\vartheta} \rho^2 . d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{\alpha} \operatorname{sen}\vartheta \frac{8a^3}{3} . \cos^3\vartheta\, d\vartheta = \frac{4\pi a^3}{3} \left[\cos^4\alpha - 1\right]$$

como $\cos^4\alpha \leqslant 1$ cambiamos el signo

$$V = \frac{4\pi a^3}{3} \left[1 - \cos^4\alpha\right]$$

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $v = \frac{4\pi a^3}{3}$, la fórmula da el volumen de la esfera, lo que no tiene sentido, ya que para $\alpha = \pi/2$ el cono degenera en el plano $z = 0$ y el volumen limitado se hace infinito.

12.3.- Calcular la integral triple:

$$I = \iiint_v \frac{y^2 z^2}{\operatorname{sen}^5 x} . dxdydz$$

extendida al volumen encerrado por la superficie

$$4y^2 + az^2 = (\pi - x) \operatorname{sen}^2 x \quad (a > 0)$$

$(\pi - x)$ ha de ser positivo, luego x varía de 0 aπ.

Las secciones obtenidas al cortar con x constante son elipses de ecuaciones $4y^2 + az^2 = (\pi - x)\text{sen}^2 x$,

$$\frac{y^2}{(\pi - x).\text{sen}^2 x/4} + \frac{z^2}{(\pi - x)\text{sen}^2 x/a} = 1 \equiv R$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\text{sen}^5 x} \iint_R y^2 z^2 dxdy$$

En la integral doble extendida a R aplico la fórmula de Dirichlet

$$I = 4\int_0^{\pi} \frac{dx}{\text{sen}^5 x} \frac{(\pi - x)^3 . \text{sen}^6 x . \Gamma(\frac{3}{2}) . \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{\pi}{24}\int_0^{\pi} (\pi - x)^3 . \text{sen } x \, dx = \frac{\pi^4}{24} + \frac{\pi^2}{4}$$

12.4.- Calcular la integral triple

$$I = \iiint_v (ax+by+cz)^2 dx\, dy\, dz$$

extendida al volumen $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

$$I = \iiint_v (ax+by+cz)^2 dxdydz = \iiint_v (a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz)dxdydz$$

$\iiint_v xydv = \iiint_v xzdv = \iiint_v yzdv = 0$ por ser las funciones subintegrales impares en el volumen de integración.

$\iiint_v x^2 dv = \iiint_v y^2 dv = \iiint_v z^2 dv$ por la simetría del dominio v, luego

$$I = (a^2+b^2+c^2)\iiint_v z^2 dxdydz = 8(a^2+b^2+c^2)\iiint_{v'} z^2 dv$$

siendo v' el volumen encerrado en el primer octante. Aplicando a la última integral la fórmula de Dirichlet.

$$I = \frac{4}{15}\pi(a^2+b^2+c^2)$$

12.5.- Calcular la integral:

$$I = \iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2+a^2)^2}$$

extendida a todo el espacio.

Consideremos primero V como el dominio E limitado por una esfera de radio R y posteriormente tomaremos límites cuando el radio R tiende a infinito.

$$I_1 = \iiint_E \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2+a^2)^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \varrho\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = \varrho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z = \varrho\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{array}\right\} \qquad J = \varrho^2\cos\varphi$$

$$I_1 = 8\int_0^R \frac{\varrho^2}{(\varrho^2+a^2)^2}\,d\varrho \int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi \int_0^{\pi/2} d\vartheta = 8\int_0^R \frac{\varrho^2}{(\varrho^2+a^2)^2}\,d\varrho \int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\cdot\frac{\pi}{2} =$$

$$= 4\pi\int_0^R \frac{\varrho^2}{(\varrho^2+a^2)^2}\,d\varrho = 2\pi\left[\frac{1}{a}\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{\varrho}{a} - \frac{\varrho}{\varrho^2+a^2}\right]_0^R = 2\pi\left[\frac{1}{a}\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{R}{a} - \frac{R}{R^2+a^2}\right]$$

$$I = \lim_{R\to\infty} I_1 = \lim_{R\to\infty} 2\pi\left[\frac{1}{a}\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{R}{a} - \frac{R}{R^2+a^2}\right] = \frac{\pi^2}{a}$$

12.6.- Calcular

$$I = \iiint_V (x+y+z)^{2n}\,dx\,dy\,dz$$

extendido al volumen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$

siendo $\underline{n}$ un número real positivo.

Se efectua el cambio de variables

$$\left\{\begin{array}{l} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{array}\right. \qquad J = abc\ ; \qquad I = abc\iiint_V (au+bv+cw)^{2n}\,du\,dv\,dw\ .$$

V' es el volumen encerrado por $u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1$

La distancia del punto (u, v, w) al plano $au + bv + cw = 0$

es $p = \dfrac{au + bv + cw}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Luego

$$I = abc\,(a^2+b^2+c^2)^n \iiint_{n^2+v^2+w^2 \leqslant 1} \rho^{2n}\, du\, dv\, dw$$

Por la simetría de la esfera queda:

$$I = abc\,(a^2+b^2+c^2)^n \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leqslant 1} w^{2n}\, du\, dv\, dw$$

Efectuando el cambio a esféricas

$$I = abc(a^2+b^2+c^2)^n \iiint_{0\ \ \rho < 1}^{2\pi} \rho^{2n+2} \cos^{2n}\vartheta \ \text{sen}\ \vartheta\ d\rho\ d\vartheta\ d\Psi =$$

$$= abc\,(a^2+b^2+c^2) \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^1 \rho^{2n+2}\, d\rho \int_0^{\pi} \cos^{2n}\vartheta\ \text{sen}\ \vartheta\ d\vartheta =$$

$$= abc(a^2 + b^2 + c^2)^n\ 2\pi \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{2}{2n+1} = \left| \frac{4\pi\ abc(a^2+b^2+c^2)^n}{(2n+3)\ (2n+1)} \right.$$

8

Introducción a la teoría de los campos escalares y vectoriales

LECCION 8

INTRODUCCION A LA TEORIA DE LOS CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

1.- Gradiente.-

Consideremos la función uniforme, continua y derivable en una cierta región del espacio, $U = U(x,y,z)$ que nos define para cada punto (x,y,z) de dicha región un número U. A esta distribución se le llama campo escalar; llamamos superficies de nivel del campo a las superficies $U = U(x,y,z) = K$, siendo K constante.

Se define como gradiente de U al vector

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \bar{K}$$

Si definimos el operador diferencial nabla ∇ (operador de Hamilton)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{K} = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

el gradiente de U lo podremos escribir en función de este operador de la siguiente forma:

$$\text{grad } U = \nabla U$$

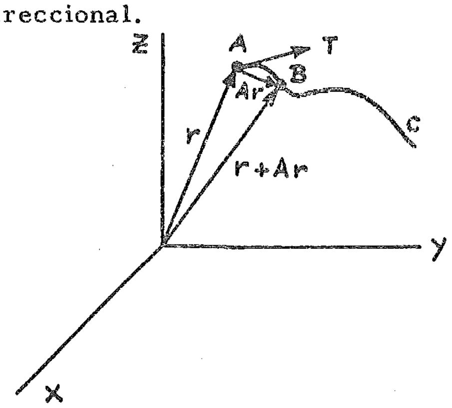
De modo trivial se podría demostrar las siguientes propiedades:

a) $\nabla(C.U) = C.\nabla U$ siendo c un escalar independiente de x, y, z.

b) $\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v$.

c) $\nabla(u.v) = u.\nabla v + v.\nabla u$.

Para ver el significado geométrico del vector gradiente, vamos a dar el concepto de derivada direccional.



Consideremos una curva C en el espacio y dos puntos de ella A(x,y,z) y B(x+ Δx, y + Δy, z + Δz). Los vectores de posición de A y B serán:

$$\bar{r} = x.\bar{i} + y.\bar{j} + z.\bar{k}$$

$$\bar{r} + \overline{\Delta r} = (x+\Delta x).\bar{i}+(y+\Delta y).\bar{j}+(z+\Delta z).\bar{k}$$

Sea $\varphi(x,y,z)$ una función escalar, continua y derivable en una cierta región del espacio que contiene el arco de c desde A hasta B.

Definimos como derivada direccional de $\varphi(x,y,z)$ en el punto A, en la dirección del vector unitario $\bar{T}$ tangente a c en A a la expresión:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - \varphi(x,y,z)}{\Delta s}$$

siendo Δs la longitud del arco de c de A a B.

El vector unitario $\bar{T}$ tangente a C en un punto cualquiera A es:

$$\bar{T} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}.\bar{i} + \frac{dy}{ds}.\bar{j} + \frac{dz}{ds}.\bar{k}$$

por otro lado:

$$\frac{\partial\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}.\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}.\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}.\frac{dz}{ds} = \overline{\mathrm{grad}\varphi}.\bar{T}$$

o sea

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \overline{\nabla\varphi}.\bar{T} = |\overline{\nabla\varphi}|.\ \bar{T}.\cos\vartheta = |\nabla\varphi|.\ \cos\vartheta \qquad (1)$$

$|\bar{T}| = 1$ y siendo ϑ el ángulo que forman el vector gradiente $\overline{\nabla\varphi}$ y el vector unitario $\bar{T}$ tangente a la curva C.

Como $-1 \leqslant \cos\vartheta \leqslant 1$, $\frac{\partial\varphi}{ds}$ alcanza su valor máximo cuando $\vartheta = 0$, o sea cuando $\bar{T}$ y $\overline{\nabla\varphi}$ tienen la misma dirección,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{máx} = |\nabla\varphi| \qquad (2)$$

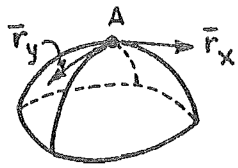
Luego el gradiente es la derivada máxima.

Para ver la dirección del vector gradiente, calculemos un vector unitario normal a una superficie S. Sea la superficie representada por:

$x = x \qquad y = y \qquad z = z(x.y)$ ó vectorialmente

$$\overline{r(x,y)} = x.\overline{i} + y.\overline{j} + z(x.y).\overline{k}$$

Las derivadas parciales representan vectores tangentes a líneas de la superficie que pasan por A, así pues derivando respecto de x é y



$$\left.\begin{array}{l} \overline{r}_x = \overline{i} + \dfrac{\partial z}{\partial x}.\overline{k} \\ \overline{r}_y = \overline{j} + \dfrac{\partial z}{\partial y}.\overline{k} \end{array}\right\}$$

si la superficie viene en implícitas

$$\varphi(x,y,z) = 0 \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\varphi'x}{\varphi'z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\varphi'y}{\varphi'z} \end{array}\right.$$

luego:

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{r}_x = \overline{i} - \dfrac{\varphi'x}{\varphi'z}.\overline{k} \\ \overline{r}_y = \overline{j} - \dfrac{\varphi'y}{\varphi'z}.\overline{k} \end{array}\right.$$

$$\overline{r}_x \times \overline{r}_y = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & -\dfrac{\varphi'x}{\varphi'z} \\ 0 & 1 & -\dfrac{\varphi'y}{\varphi'z} \end{vmatrix} = \frac{\varphi'x}{\varphi'z}.\overline{i} + \frac{\varphi'y}{\varphi'z}.\overline{j} + \overline{k} = \frac{1}{\varphi'z}(\varphi'x.\overline{i} + \varphi'y.\overline{j} + \varphi'z.\overline{k})$$

el vector unitario normal $\overline{n}$ será:

$$\overline{n} = \frac{\overline{r}_x \times \overline{r}_y}{|\overline{r}_x \times \overline{r}_y|} = \frac{\varphi'x.\overline{i} + \varphi'y.\overline{j} + \varphi'z.\overline{k}}{\sqrt{\varphi'x^2 + \varphi'y^2 + \varphi'z^2}}$$

recordando la expresión del gradiente $\overline{\nabla\varphi}$ se observa:

$\overline{n} = \dfrac{\overline{\nabla\varphi}}{|\overline{\nabla\varphi}|}$, (3), luego el vector $\overline{\nabla\varphi}$ es perpendicular a la superficie S definida por $\varphi(x, y, z) = c$.

De (1), (2) y (3), tenemos que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \overline{\nabla \varphi} \cdot \bar{n} = |\overline{\nabla \varphi}| \cdot |\bar{n}| \cdot \cos 0^{\circ} = |\overline{\nabla \varphi}|$$

Luego resumiendo, el vector gradiente tiene por módulo la derivada de φ en la dirección de la normal a la superficie, por dirección la de la normal a dicha superficie de nivel y por sentido el de la φ creciente. Es por lo tanto independiente de la elección de ejes.

2.- Divergencia de una función vectorial.-

Supongamos tres funciones uniformes, continuas, derivables y con derivables continuas $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$, para los valores de (x, y, z) pertenecientes a un cierto dominio del espacio R. Estas funciones definirán en cada punto del espacio un vector $\overline{V}$ de componentes X, Y, Z que llamaremos función vectorial o campo vectorial. Multipliquemos escalarmente el vector $\overline{V}$ por el vector simbólico $\overline{\nabla}$

$$\begin{cases} \overline{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \dfrac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \dfrac{\partial}{\partial z} \bar{k} \\ \overline{V} = X \cdot \bar{i} + Y \cdot \bar{j} + Z \cdot \bar{k} \end{cases}$$

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{V} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

A este escalar así obtenido le llamamos divergencia del campo vectorial $\overline{V}$ en el punto x, y, z.

$$\operatorname{div} \overline{V} = \overline{\nabla} \cdot \overline{V}$$

El procedimiento seguido no da significado físico matemático alguno al concepto de divergencia, sino su forma de cálculo. En otras materias el alumno verá múltiples interpretaciones físicas de este importante concepto.

3.- Rotacional de una función vectorial.-

Con las mismas hipótesis establecidas en el número anterior para la definición de divergencia, multipliquemos ahora vectorialmente el vector simbólico $\overline{\nabla}$ por el vector $\overline{V}$

$$\overline{\nabla} \times \overline{V} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right).\overline{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right).\overline{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right).\overline{k}$$

Al vector así obtenido se le llama rotacional, curl ó torbellino de la función ó campo vectorial $\overline{V}$ en el punto x, y, z.

$$\text{rot } \overline{V} = \overline{\nabla x} \ \overline{V}$$

Si el rotacional es idénticamente nulo, las derivadas cruzadas son iguales y por lo tanto existe un campo escalar φ potencial de $\overline{V}$ y recíprocamente, si $\overline{V} = \text{grad}\,\varphi \implies \text{rot } \overline{V} = 0$.

Así pues, la condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial $\overline{V}$ sea gradiente de otro escalar es que rot $\overline{V} = 0$. A los campos vectoriales con potencial se les llama irrotacionales.

4.- Laplaciana.-

Si multiplicamos el operador $\overline{\nabla}$ escalarmente por sí mismo, se obtiene otro operador que se llama laplaciana ó operador de Laplace y se representa así

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla . \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Si se lo aplicamos a una función escalar $\varphi(x, y, z)$ queda:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Decimos que la función escalar φ es armónica, cuando es contínua, tiene derivadas segundas parciales continuas y satisface la ecuación de Laplace $\Delta\varphi = 0$.

El operador de Laplace interviene en la mayoría de los fenómenos de transmisión de energía y son múltiples las aplicaciones en las que aparece.

5.- Circulación de un vector.-

Ya se definió este concepto en la lección 4. Recordemos de nuevo que se llama circulación de un campo vectorial $\overline{V}$ a lo largo de una línea C, a la integral curvilínea del producto escalar de $\overline{V}$ por el vector $\overline{ds}$ de componentes dx, dy, dz, tomado sobre dicha línea, o sea

Circulación de $\overline{V}$ a lo largo de c =

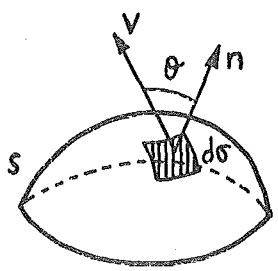
$$= \int_c \overline{V}.\overline{ds} = \int_c X.dx + Y.dy + Z.dz$$

6.- <u>Flujo de un vector. Interpretación vectorial del teorema de Stokes.</u>-

Si consideramos una superficie de dos caras y sobre ella un casquete S, se define como flujo del vector $\overline{V}$ de componentes $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ sobre dicho casquete, a la integral de superficie del producto escalar del vector $\overline{V}$ por el vector $\overline{d\sigma}$ de módulo el área del elemento $d\sigma$ y de dirección la de la seminormal exterior a dicha superficie.

$$\overline{V} = X\,.\,\overline{i} + Y.\overline{j} + Z.\,\overline{k}$$

$$\overline{d\sigma} = dydz\,.\,\overline{i} + dxdz.\overline{j} + dx\,dy\,\overline{k}$$



Flujo del vector $\overline{V}$ sobre S $= \iint_S \overline{V}.\overline{d\sigma} = \iint_S Xdydz + Ydxdz + Zdxdy$

Así pues el flujo es el concepto fisicomatemático que corresponde al de integral de superficie que ya se definió.

Recordemos que el teorema de Stokes decía:

$$\iint_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy =$$

$$= \int_c Xdx+Ydy+Zdz$$

con las nuevas definiciones dadas en esta lección lo podremos escribir así:

$$\iint_S \text{rot}\,\overline{V}\,.\,\overline{d\sigma} = \int_c \overline{V}\,.\,\overline{ds} \qquad \text{ó}$$

$$\iint_S (\overline{\nabla}\times\overline{V})\,.\,\overline{d\sigma} = \int_c \overline{V}\,.\,\overline{ds}$$

y se podrá enunciar así: El flujo del rotacional de un vector $\overline{V}$ sobre la cara exterior de un casquete de superficie S, es igual a la circulación del vector $\overline{V}$ a lo largo del contorno c de dicho casquete.

7.- <u>Interpretación vectorial del teorema de Gauss</u>.-

Recordemos el teorema de Gauss que decía

$$\iiint_R \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\ dy\ dz = \iint_{\bar{}} X dy\ dz + Z\ dx\ dy + Y\ dx\ dz$$

con las definiciones estudiadas se escribirá:

$$\iiint_R (\text{div}\,\overline{V})\,.\,dV = \iint_S \overline{V}\,.\,\overline{d\sigma} \qquad \text{ó}$$

$$\iiint_R (\overline{\nabla}\,.\,\overline{V})\,.\,dV = \iint_S \overline{V}\,.\,\overline{d\sigma}$$

y se podrá enunciar así: La integral de la divergencia de un vector $\overline{V}$ en un volúmen R es igual al flujo total del vector $\overline{V}$ sobre la cara exterior S de dicho volumen.

Cuando la divergencia es idénticamente nula, también lo es el flujo que atraviesa la cara exterior de toda superficie cerrada. O sea, en toda superficie cerrada son iguales los flujos entrante y saliente.

Si $\overline{V} = \overline{\nabla}\varphi$, se tiene div $\overline{V} = \overline{\nabla}\,.\,\overline{V} = \overline{\nabla}\,.\,(\overline{\nabla}\varphi) = \Delta\varphi$

y el teorema de Gauss queda así

$$\iiint_R \Delta\varphi\,.\,dV = \iint_S \overline{\nabla}\varphi\,.\,\overline{d\sigma} = \iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,.\,d\sigma$$

siendo $\partial\varphi/\partial n$ la derivada de φ en la dirección de la normal a la superficie S en cada punto, ya que:

$$\overline{\nabla\varphi}.\overline{d\sigma} = |\overline{\nabla\varphi}|.\ \cos\vartheta\ .d\sigma = \frac{\partial\varphi}{\partial n}.d\sigma$$

8.- Teoremas de Green.-

Consideremos los campos escalares P(x, y, z), Q(x, y, z), y definamos el vector:

$$\overline{V} = P(\overline{\nabla Q}) = P(\frac{\partial Q}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial Q}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial Q}{\partial z}\overline{k}) = P.\frac{\partial Q}{\partial x}\overline{i} + P.\frac{\partial Q}{\partial y}\overline{j} + P\frac{\partial Q}{\partial z}\overline{k}$$

$$\mathrm{div}\ \overline{V} = \mathrm{div}\ [P(\nabla Q)] = \frac{\partial}{\partial x}(P.\frac{\partial Q}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(P.\frac{\partial Q}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(P.\frac{\partial Q}{\partial z}) = \frac{\partial P}{\partial x}.\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}.\frac{\partial Q}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial P}{\partial z}.\frac{\partial Q}{\partial z} + P(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}) = \overline{\nabla P}\ .\ \overline{\nabla Q} + P.\Delta Q,$$ aplicando la fórmula de Gauss queda:

$$\iiint_R (\mathrm{div}\ \overline{V}).dv = \iiint_R (\overline{\nabla P}.\ \overline{\nabla Q} + P.\ \Delta Q)dv = \iint_S [P(\overline{\nabla Q})].\overline{d\sigma} \qquad (1)$$

del mismo modo con el vector $V' = Q(\overline{\nabla P})$

$$\iiint_R (\mathrm{div}\ \overline{V'}).dv = \iiint_R (\overline{\nabla Q}.\overline{\nabla P} + Q.\ \Delta P).dv =$$

$$= \iint_S [Q(\overline{\nabla P})]\ \overline{d\sigma} \qquad (2)$$

restando estas dos últimas igualdades queda:

$$\iiint_R (P.\Delta Q - Q.\Delta P)dv = \iint_S [P.\overline{\nabla Q} - Q\ .\ \overline{\nabla P}].\ \overline{d\sigma} = \iint_S [P.\frac{\partial Q}{\partial n} - Q\frac{\partial P}{\partial n}]d\sigma \qquad (3)$$

Las relaciones (1), (2) y (3) son los teoremas de Green, que junto con los de Stokes y Gauss se utilizan frecuentemente en la teoría de campos.

9.- Operaciones con el operador ∇.-

Sin demostrar, vamos a escribir algunas relaciones útiles que dejamos como ejercicio su comprobación:

1) $\overline{\nabla}\ .(\overline{\nabla}\varphi) = \Delta\varphi$, la divergencia del gradiente es la laplaciana.

2) $\overline{\nabla} x (\overline{\nabla} \varphi) = 0$, el rotacional del gradiente es nulo

3) $\overline{\nabla} . (\overline{\nabla} x \overline{V}) = 0$, la divergencia del rotacional de un vector es nula.

4) $\overline{\nabla} . (\varphi \overline{V}) = \varphi(\overline{\nabla} . \overline{V}) + \overline{V} . (\overline{\nabla} \overline{V})$

5) $\overline{\nabla} x (\varphi \overline{V}) = \varphi (\overline{\nabla} x \overline{V}) + (\overline{\nabla} \varphi) x \overline{V} = \varphi (\overline{\nabla} x \overline{V}) - \overline{V} x \overline{\nabla} \varphi$

6) $\overline{\nabla} . (\overline{V}_1 x \overline{V}_2) = \overline{V}_2 . (\overline{\nabla} x \overline{V}_1) - \overline{V}_1 . (\overline{\nabla} x \overline{V}_2)$

7) $\overline{\nabla} x (\overline{\nabla} x \overline{V}) = \overline{\nabla}(\overline{\nabla} . \overline{V}) - \Delta V$, el rotacional del rotacional de un vector es el gradiente de la divergencia del vector menos la laplaciana.

10.- Operadores en coordenadas curvilíneas.-

En la lección 18 se da la definición de sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales.

Supongamos definido tal sistema mediante las ecuaciones:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w) \tag{1}$$

que permiten también determinar de manera única $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ en función de $\underline{x}$ $\underline{y}$ $\underline{z}$.

Si en (1) se dejan constantes $\underline{v}$ y $\underline{w}$, al variar $\underline{u}$ se obtienen las ecuaciones paramétricas de una curva coordenada, la curva $\underline{u}$. Análogamente se obtienen las otras dos curvas coordenadas. Por ser el sistema ortogonal, ocurre que las tangentes en cada punto P a las tres curvas coordenadas que pasan por P forman un triedro trirrectángulo.

10.1.- Elemento de longitud en coordenadas curvilíneas.-

Si imaginamos una curva cualquiera que pase por P cuya ecuación vectorial sea

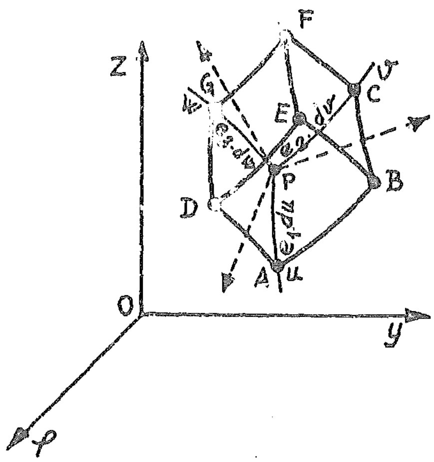
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

donde x, y, z son funciones de un cierto parámetro, recordemos que el elementos de longitud ds, en coordenadas cartesianas tiene por expresión

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2}$$

Si en (1) diferenciamos y sustituimos en (2) las expresiones de $\underline{dx}$, $\underline{dy}$, $\underline{dz}$ resulta

$$ds^2 = e^2_1 \, du^2 + e^2_2 dv^2 + e^2_3 + dw^2 \tag{3}$$



Siendo:

$$e^2_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad e^2_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$e^2_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 \qquad (4)$$

por ser $\frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial z}{\partial v} = 0$ etc. en virtud de la ortogonalidad del sistema.

Si aplicamos la expresión (3) al caso de la curva coordenada u, se obtiene $ds_1 = e_1\ du$,, . Análogamente $ds_2 = e_2\ dv$,, $ds_3 = e_3\ dw$ (5) donde hemos llamado ds_i al elemento de longitud de la curva coordenada i (i = 1 curva u; i = 2 curva v; i = 3 curva w).

Los números e_i son los factores de reducción que expresan los cocientes entre elementos de longitud sobre las curvas coordenadas y las diferenciales de las respectivas coordenadas curvilíneas. Tales números e_i varían de un punto a otro, es decir son funciones de las coordenadas (x, y, z) del punto P. Se les llama también unidades de longitud locales. En la figura se ha representado el paralelepípedo elemental que en coordenadas curvilíneas juega el papel de paralelepípedo elemental de aristas dx, dy, dz del sistema cartesiano rectangular.

10.2.- Expresión de un escalar y de un vector en coordenadas curvilíneas.-

Si consideramos una función escalar U(x, y, z) su expresión en el sistema curvilíneo se obtiene fácilmente sustituyendo x, y, z por sus valores (1).

Si consideramos una función vectorial $\vec{V}(x, y, z)$, y sus componentes según los ejes cartesianos se designan por X, Y, Z, se trata de encontrar las componentes de este vector sobre las tangentes en P a las curvas coordenadas. Se tiene fácilmente:

$$\left.\begin{aligned} V_u &= X\cos(x\,u) + Y\cos(y\,u) + Z\cos(z\,u) \\ V_v &= X\cos(x\,v) + Y\cos(y\,v) + Z\cos(z\,v) \\ V_w &= X\cos(x\,w) + Y\cos(y\,w) + Z\cos(z\,w) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Los valores de los diferentes cosenos se pueden calcular así: si consideramos la curva coordenada u el vector tangente tiene por expresión

$$\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}$$

y los cosenos de los ángulos que forma este vector con los ejes coordenados se obtienen dividiendo las respectivas componentes por el módulo que es e_1 según (4). Luego podemos escribir:

$$\cos(xu) = \frac{1}{e_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\,,\quad \cos(yu) = \frac{1}{e_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\,,\quad \cos(zu) = \frac{1}{e_1}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

y análogamente

$$\cos(xv) = \frac{1}{e_2}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\,,\quad \cos(yv) = \frac{1}{e_2}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\,,\quad \cos(zv) = \frac{1}{e_2}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\cos(xw) = \frac{1}{e_3}\cdot\frac{\partial x}{\partial w}\,,\quad \cos(yw) = \frac{1}{e_3}\cdot\frac{\partial y}{\partial w}\,,\quad \cos(zw) = \frac{1}{e_3}\cdot\frac{\partial z}{\partial w} \qquad (7)$$

11.- Expresión del gradiente en curvilíneas.-

Como aplicación calculemos las componentes en el sistema curvilíneo, del vector grad U. Para ello recordemos que la derivada direccional de U según una cierta recta es igual a la proyección del grad U sobre dicha recta ó bien apliquemos (6). Según esto se tiene:

$$(\overrightarrow{\text{grad}\,U})_u = \frac{\partial U}{\partial x}\cos(xu) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(yu) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(zu) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{1}{e_1}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{1}{e_1}\frac{\partial y}{\partial u} +$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial z}\frac{1}{e_1}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{e_1}\,\frac{\partial U}{\partial u}$$

y de forma análoga se obtienen las otras dos componentes. En resumen:

$$\overrightarrow{(\text{grad } U)}_u = \frac{1}{e_1}\frac{\partial U}{\partial u}, \quad \overrightarrow{(\text{grad } U)}_v = \frac{1}{e_2}\frac{\partial U}{\partial v}, \quad \overrightarrow{(\text{grad } U)}_w = \frac{1}{e_3}\frac{\partial U}{\partial w} \qquad (8)$$

Si designamos por $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$, $\vec{i}_3$ vectores unitarios tangentes a las tres curvas coordenadas se puede escribir:

$$\overrightarrow{\text{grad } U} = \frac{1}{e_1}\frac{\partial U}{\partial u}\vec{i}_1 + \frac{1}{e_2}\frac{\partial U}{\partial v}\vec{i}_2 + \frac{1}{e_3}\frac{\partial U}{\partial w}\vec{i}_3 \qquad (9)$$

y por tanto la expresión simbólica del operador "nabla" en coordenadas curvilí - neas es:

$$\vec{\nabla} = \frac{\vec{i}_1}{e_1}\cdot\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\vec{i}_2}{e_2}\cdot\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\vec{i}_3}{e_3}\cdot\frac{\partial}{\partial w} \qquad (10)$$

Así por ejemplo en coordenadas cilíndricas $x = r\cos\varphi$, $y = r \text{ sen}\,\varphi$,, $z = z$ resulta:

$e^2_1 = \cos^2\varphi + \text{sen}^2\varphi = 1$, $e^2_2 = r^2(\text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2$, $e^2_3 = 1$. o sea $e_1 = 1$, $e_2 = r$, $e_3 = 1$, con lo cual:

$$\overrightarrow{\text{grad } U} = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{i}_1 + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial\varphi}\vec{i}_2 + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{i}_3$$

De manera similar se obtendría en coordenadas esféricas:

$x = r\cos\vartheta\,\text{sen}\,\varphi$,, $y = r\,\text{sen}\,\vartheta\,\text{sen}\,\varphi$,, $z = r\cos\varphi$, resulta:

$e_r = 1$,, $e_\varphi = r$,, $e_\vartheta = r\,\text{sen}\,\varphi$ con lo cual.

$$\overrightarrow{\text{grad } U} = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\vec{i}_\varphi + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\varphi}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\vec{i}_\vartheta$$

12.- Divergencia de un vector en curvilíneas.-

Utilizaremos el teorema de Ostrogradsky-Gauss aplicado al "paralelepípedo" elemental de la figura, de una manera intuitiva pero suficiente para nuestro propósito.

La integral triple de la divergencia del vector $\vec{V}$ se puede escribir como igual a div $\vec{V}$ por el volúmen $e_1\, e_2\, e_3$ du dv dw del "paralelepípedo" elemental.

Calcularemos el flujo del vector sobre parejas de caras opuestas; así por ejemplo la diferencia entre el flujo del vector $\vec{V}$ sobre la cara ABED y sobre la cara opuesta PCFG es igual a $\frac{\partial}{\partial u}(e_2\, e_3\, V_u)$ du dv dw, y del mismo modo se obtiene para los otros dos pares de caras opuestas, luego:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{e_1 \, e_2 \, e_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} (e_2 e_3 V_u) + \frac{\partial}{\partial v} (e_3 \, e_1 \, V_v) + \frac{\partial}{\partial w} (e_1 e_2 V_w) \right] \tag{11}$$

Como ejercicio pueden obtenerse las siguientes expresiones:

En coordenadas cilíndricas

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \, V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

En coordenadas esféricas

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_\varphi \operatorname{sen} \varphi) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \varphi} \cdot \frac{\partial V_\vartheta}{\partial \vartheta}$$

13.- El rotacional en curvilíneas.-

La aplicación del teorema de Stokes a la cara PCFG nos va a dar la componente del vector $\overrightarrow{\operatorname{rot} V}$ en la dirección de la tangente a la curva u.

Se tiene en efecto:

Circulación de $\vec{V}$ a lo largo de $\overset{\frown}{PC} = V_v \cdot e_2 \cdot dv$

Id. a lo largo de $\overset{\frown}{CF} = V_w \cdot e_3 \cdot dw + \frac{\partial}{\partial v} (V_w \cdot e_3 \cdot dw) dv$

Id. a lo largo de $\overset{\frown}{FG} = - \left[V_v \cdot e_2 \cdot dv + \frac{\partial}{\partial w} (V_v \cdot e_2 \cdot dv) dw \right]$

Id. a lo largo de $\overset{\frown}{GP} = - V_w \cdot e_3 \cdot dw$

El flujo del rotacional sobre la cara PCFG vale $(\overrightarrow{\operatorname{rot} V})_u \cdot e_2 \cdot e_3 \cdot dv \cdot dw$ luego:

$$(\overrightarrow{\operatorname{rot} V})_u = \frac{1}{e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial v} (e_3 V_w) - \frac{\partial}{\partial w} (e_2 V_v) \right]$$

Por permutación circular podemos escribir:

$$(\overrightarrow{\operatorname{rot} V})_v = \frac{1}{e_3 e_1} \left[\frac{\partial}{\partial w} (e_1 V_u) - \frac{\partial}{\partial u} (e_3 \, V_w) \right]$$

$$(\overrightarrow{\operatorname{rot} V})_w = \frac{1}{e_1 e_2} \left[\frac{\partial}{\partial u} (e_2 V_v) - \frac{\partial}{\partial v} (e_1 V_u) \right]$$

Estos resultados se pueden escribir reunidos de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{\text{rot } V} = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \begin{vmatrix} e_1 \vec{i_1} & e_2 \vec{i_2} & e_3 \vec{i_3} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ e_1 V_u & e_2 V_v & e_3 V_w \end{vmatrix} \qquad (12)$$

Así por ejemplo, en coordenadas cilíndricas se obtiene:

$$\overrightarrow{\text{rot } V} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{i_r} & r \vec{i_\varphi} & \vec{i_z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_r & V_\varphi & V_z \end{vmatrix}$$

y en coordenadas esféricas resultaría:

$$\overrightarrow{\text{rot } V} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \begin{vmatrix} \vec{i_r} & r \vec{i_\varphi} & r \operatorname{sen}\varphi \, \vec{i_\vartheta} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ V_r & r V_\varphi & r \operatorname{sen}\varphi \, V_\vartheta \end{vmatrix}$$

14.- <u>Expresión de la laplaciana en curvilíneas.</u>-

Si se sustituye en (11) $\bar{V}$ por $\overrightarrow{\text{grad } U}$ se obtiene:

$$\Delta U = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{e_2 e_3}{e_1} \frac{\partial U}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{e_3 e_1}{e_2} \frac{\partial U}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial w} \right) \right] \qquad (13)$$

Como aplicación, en coordenadas cilíndricas resulta:

$$\Delta U = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

En coordenadas esféricas:

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}$$

Todos estos resultados serán de aplicación constante en diversas materias especialmente en la teoría de campos.

9

Series de Fourier

LECCION 9

SERIES DE FOURIER

1.- Funciones periódicas.-

Decimos que una función $f(x)$ es periódica de periodo T cuando se verifique para todo valor de x

$$f(x + nT) = f(x), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Al menor número positivo T que cumple la condición anterior, se le llama periodo propio o fundamental. Si $f(x)$ admite el periodo fundamental T, también admite los periodos múltiples de T, esto es 2T, 3T, ...

Las funciones periódicas más sencillas son $y = \operatorname{sen}x$, $y = \cos x$, de periodo 2π, ó en forma más general $y = A.\operatorname{sen}(nx + \varphi)$ de periodo $T = 2\pi/n$.

Toda suma de armónicos de la forma

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty A_n.\operatorname{sen}(n\omega x + \varphi_n) \tag{1}$$

es una función periódica de periodo $2\pi/\omega$. Escribamos (1) de otra forma:

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty A_n[\operatorname{sen}(n\omega x).\cos\varphi_n + \cos n\omega x.\operatorname{sen}\varphi_n] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty [a_n.\cos n\omega x + b_n.\operatorname{sen} n\omega x,] \tag{2}$$

siendo:

$$a_n = A_n . \operatorname{sen}\varphi_n$$

$$b_n = A_n . \cos\varphi_n$$

Si se quiere reducir a periodo 2π, basta aplicar un simple cambio de escala en el eje x.

$$\left\{\begin{matrix} x & T \\ t & 2\pi \end{matrix}\right\} \quad \text{es decir} \quad x = \frac{T.t}{2\pi} = \frac{2\pi t}{\omega.2\pi} = \frac{t}{\omega}$$

y la expresión (2) se convierte en:

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n . \cos nt + b_n \ \mathrm{sen}\ nt), \text{ de periodo } 2\pi .$$

2.- <u>Funciones representadas por series de Fourier. Fórmulas de Euler. Teorema de Dirichlet.</u> -

Dada una función f(x), definida para todo valor de x, periódica con periodo $T = 2\pi/\omega$, queremos ver si existe una serie trigonométrica del tipo (1), - $\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n . \cos n\omega x + b_n . \mathrm{sen}\ n\omega x)$, de la cual f(x) sea la suma.

Esta serie, se llama serie de Fourier de f(x), si existe, y se podrá escribir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n . \cos n\omega x + b_n . \mathrm{sen}\ n\omega x) \qquad (3)$$

Así pues, se plantean dos problemas fundamentales:

a) En qué condiciones es desarrollable en serie de Fourier una función periódica de periodo $T = 2\pi/\omega$, ó sea cuándo es válida la relación (2).

b) Verificada la condición anterior, calcular los coeficientes a_0, a_n y b_n.

Supongamos que la serie trigonométrica:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 . \cos\omega x + b_1 \ \mathrm{sen}\omega x + a_2 \cos 2\omega x + $$
$$+ b_2 \mathrm{sen} 2\omega x + \ldots \qquad (4)$$

es uniformemente convergente en un intervalo cerrado de amplitud $2\pi/\omega$. Para ello bastará, por ejemplo, que la serie numérica formada con los valores absolutos de sus coeficientes, sea convergente

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + |a_1| + |b_1| + \ldots + |a_n| + |b_n| + \ldots \qquad (5)$$

por ser (5) mayorante de la dada (4).

En esta hipótesis, la función representada por (4), será continua en dicho intervalo, y para todo valor de x, por ser periódica de periodo $2\pi/\omega$, se podrá escribir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n . \cos n\omega x + $$
$$b_n . \mathrm{sen}\ n\omega x) \qquad (6)$$

Multiplicamos todos los términos de (6) por cos pωx. Como $|\cos p\omega x| \leqslant 1$, la serie obtenida sigue siendo uniformemente convergente y se puede integrar en el intervalo $2\pi/\omega$. Teniendo en cuenta el valor de estas integrales:

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos n\omega x . \cos p\omega x \, dx = 0, \qquad n \neq p$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sen} n\omega x . \cos p\omega x \, dx = 0, \qquad n \neq p$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 p\omega x dx = \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sen}^2 p\omega x dx = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sen} p\omega x . \cos p\omega x \, dx = 0$$

se obtienen las fórmulas de Euler:

$$\left. \begin{aligned} a_p &= \frac{2}{T} . \int_0^T f(x) . \cos p\omega x \, dx \\ b_p &= \frac{2}{T} . \int_0^T f(x) \operatorname{sen} p\omega x \, dx \\ a_0 &= \frac{2}{T} . \int_0^T f(x) \, dx \end{aligned} \right\} \qquad (7)$$

Los números hallados en (7), a_0, a_p, b_p, se llaman coeficientes de Fourier de la función f(x) y existen siempre que la función f(x) sea integrable. Así pues, si la serie de Fourier es uniformemente convergente en todo intervalo, la función suma f(x) es una función continua y periódica de x, estando relacionados los coeficientes de la serie con la suma f(x) por las fórmulas de Euler (7).

Sin embargo, esto no resuelve el problema fundamental de Fourier totalmente. Aclaremos estas palabras: Si f(x) es integrable, se podrán calcular siempre sus coeficientes por las fórmulas de Euler (7), pero no se sabe si la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n . \cos n\omega x + b_n . \operatorname{sen} n\omega x)$$

es convergente y tiene por suma f(x).

Las condiciones que deba cumplir f(x) para que sea posible lo anterior, han dado lugar a numerosos estudios que han sido motivo de discusión y que aún no se pueden dar por agotados.

Nos limitaremos a citar sin demostrar las condiciones suficientes de Dirichlet, que son aplicables a la mayoría de los casos que se presentan en la práctica y que podemos enunciar así:

Teorema de Dirichlet: Si la función f(x), periódica de periodo $T=2\pi/\omega$, es continua en el intervalo $[0, T]$ ó tiene en él a lo sumo un número finito de discontinuidades finitas de primera especie, así como un número finito de máximo y mínimos, la serie de Fourier obtenida aplicando a f(x) las fórmulas de Euler, es convergente y tiene por suma el valor de la función f(x) en los puntos en que ésta es continua y el promedio de los valores $f(x_0 + 0)$ y $f(x_0 - 0)$ en cada punto x_0 de los de discontinuidad mencionados.

3.- Casos particulares en que se simplifica el desarrollo.-

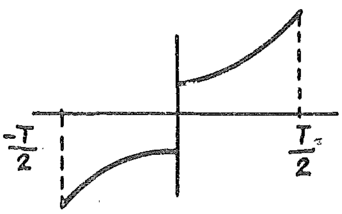
Vamos a considerar algunos casos particulares de funciones f(x), en los que por cumplir dicha función algunas condiciones determinadas, podemos ahorrarnos el cálculo de alguno de los coeficientes o prever el aspecto final del desarrollo. Estos casos son los siguientes:

I.- Función impar.- Si f(x) es impar, o sea $f(-x) = -f(x)$, se tendrá:

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x)dx + \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T/2} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{0} f(x)\cos n\,\omega x\, dx + \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T/2} f(x)\cos n\omega x dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{0} f(x)\operatorname{sen} n\omega x dx + \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T/2} f(x)\operatorname{sen} n\,\omega x\, dx$$



haciendo en las primeras integrales el cambio x = -y, dx = -dy, queda:

$$a_0 = \frac{2}{T}\cdot\int_{T/2}^{0} f(-y)(-dy)+\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)dx=\frac{-2}{T}\int_{0}^{T/2} f(y).\ dy\ +$$

$$+\ \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\ dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\cdot\int_{T/2}^{0} f(-y)\cos(-n\omega y)(-dy)+\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\cos\ n\omega x\ .\ dx=$$

$$= \frac{-2}{T}\int_{0}^{T/2} f(y).\cos(n\omega y).dy\ +\ \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x).\cos\ n\omega x\ dx\ =\ 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{T/2}^{0} f(-y)\,\text{sen}(-n\omega y).(-dy)\ +\ \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x).\,\text{sen}\ n\omega x\ dx\ =$$

$$= \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(y).\,\text{sen}(n\omega y).dy\ +\ \frac{2}{T}\cdot\int_{0}^{T/2} f(x).\,\text{sen}\ n\omega x dx=\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\,\text{sen}\,n\omega x dx$$

y el desarrollo quedará de la forma

$$f(x)\ =\ \sum_{1}^{\infty} b_n.\,\text{sen}\ n\,\omega\,x$$

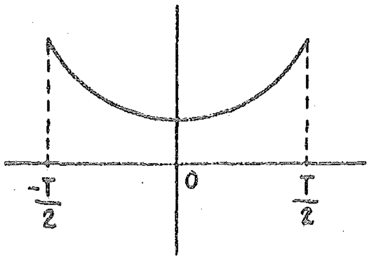
por lo que decimos que queda un desarrollo en serie de senos.

II.- Función par.- Si f(x) es par, o sea f(-x) = f(x), quedará:

$$a_0 = \frac{2}{T}\cdot\int_{-T/2}^{0} f(x)dx\ +\ \frac{2}{T}\ \cdot\int_{0}^{T/2} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(x)\cos n\omega x dx\ +\ \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\cos n\omega x.dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\cdot\int_{-T/2}^{0} f(x)\,\text{sen}\ n\omega x dx\ +\ \frac{2}{T}\cdot\int_{0}^{T/2} f(x).\,\text{sen}\ n\,\omega x.dx$$



haciendo en las primeras integrales el cambio x = -y, dx = -dy, queda:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{T/2}^{0} f(-y)(-dy) + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)dx = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(y)dy +$$

$$+ \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x).dx = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{T/2}^{0} f(-y).\cos(-n\omega y)(-dy) + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\cos n\omega x dx =$$

$$= \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(y).\cos(n\omega y).dy + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\cos n\omega x dx = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\cos n\omega x dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{T/2}^{0} f(-y)\operatorname{sen}(-n\omega y).(-dy) + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x).\operatorname{sen} n\omega x dx =$$

$$= \frac{-2}{T}\int_{0}^{T/2} f(y).\operatorname{sen}(n\omega y)dy + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x).\operatorname{sen} n\omega x dx = 0$$

quedando el desarrollo de la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n . \cos n\omega x$$

y diremos que se ha obtenido un desarrollo en <u>serie de cosenos</u>.

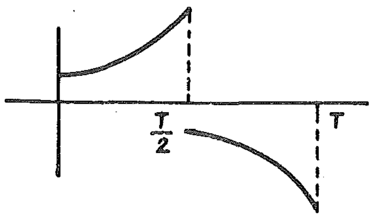
III. - <u>Alternada en impares</u>. - Si la función f(x) cumple la condición:

$$f(x + \frac{T}{2}) = -f(x), \text{ se tendrá:}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} f(x)\ dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x).\cos n\omega x dx + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} f(x)\cos n\omega x.dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x).\cos n\omega x dx + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} f(x).\cos n\omega x.dx$$



haciendo en las segundas integrales el cambio $x = y + \frac{T}{2}$; $dx = dy$, queda:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx + \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(y+\frac{T}{2}).dy = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx - \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(y)dy = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos n\omega x dx + \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(y+\frac{T}{2})\cos[n\omega(y+\frac{T}{2})].dy =$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos n\omega x.dx - \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(y).\cos(n\omega y + n\pi)dy =$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x).\cos n\omega x dx - \frac{2}{T}.(-1)^n\int_0^{T/2} f(y).\cos\ n\omega y.dy =$$

$$= \frac{2}{T}\ [1-(-1)^n]\ .\int_0^{T/2} f(x)\cos n\omega x dx$$

ó sea los términos pares ($n = \dot{2}$), $a_{2n} = 0$.

y los términos impares ($n = \dot{2}+1$), $a_{2n-1} = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos[(2n-1)\omega x].dx$

Análogamente, se obtendrá para b_n:

$$b_{2n} = 0$$

$$b_{2n-1} = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x).\,\text{sen}\,[(2n-1)\omega x]dx$$

y el desarrollo será:

$$f(x) = \sum_1^{\infty} [a_{2n-1}.\cos(2n-1)\omega x + b_{2n-1}\text{sen}(2n-1)\omega x]$$

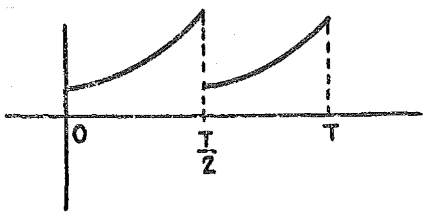
por lo que diremos que es un desarrollo en armónicos impares.

IV.- Alternada en pares.- Si la función f(x), cumple la condición $f(x+\frac{T}{2})=f(x)$, se tendrá:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\,n\omega x\,dx + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} f(x).\cos n\omega x\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\text{sen}\,n\omega x\,dx + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} f(x).\text{sen} n\omega x\,dx$$



Efectuando en las segundas integrales el cambio: $x=y+\frac{T}{2}$, $dx = dy$, y operando del mismo modo que en el caso III, se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(x)\,dx \\ a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0 \\ a_{2n} = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(x).\cos 2n\omega x.dx \\ b_{2n} = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(x).\operatorname{sen} 2n\omega x dx \end{array}\right.$$

y el desarrollo quedará:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty}(a_{2n}.\cos 2n\omega x + b_{2n}.\operatorname{sen} 2n\omega x)$$

por lo que diremos que es un desarrollo en <u>armónicos pares</u>. Obsérvese que en este caso, se ha forzado el desarrollo en serie de Fourier para obtener el resultado anterior, ya que en realidad la función original tenía periodo $T/2$, en vez del T considerado.

V. - <u>Desarrollo en serie de senos impares.</u> - Si se cumplen a la vez las condiciones de los casos I y III, ó sea:

$$\left\{\begin{array}{l} f(-x) = -f(x) \\ f(x+\frac{T}{2}) = -f(x) \end{array}\right.$$

$$a_0 = a_n = 0, \text{ por ser impar}$$

$$\text{y por ser alternada } b_{2n} = 0$$

$$b_{2n-1} = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x).\operatorname{sen}[(2n-1)\omega x]dx =$$

$$= \frac{4}{T}\int_{-T/4}^{T/4} f(x)\operatorname{sen}[(2n-1)\omega x]dx = \frac{4}{T}\int_{-T/4}^{0} f(x)\operatorname{sen}[(2n-1)\omega x]dx + \frac{4}{T}\int_0^{T/4} f(x)\operatorname{sen}[(2n-1)\omega x]dx$$

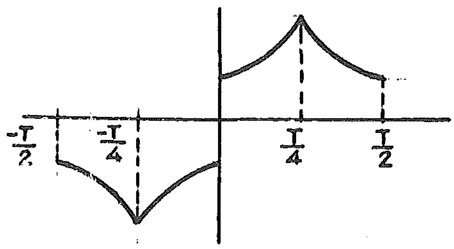
haciendo en esta integral el cambio $x = -y$, $dx = -dy$, queda:

$$b_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(x)\ \mathrm{sen}[(2n-1)\omega x]dx$$

y el desarrollo en serie de Fourier será:

$$f(x) = \sum_1^{\infty} b_{2n-1}\,.\,\mathrm{sen}\ (2n-1)\,\omega\, x$$

diremos que es un desarrollo en <u>senos impares</u>.

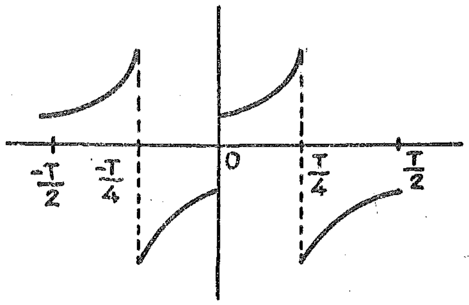


VI. - <u>Desarrollo en serie de senos pares</u>. - Si se cumplen a la vez las condiciones de los casos I y IV, ó sea

$$\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ f(x+\frac{T}{2}) = f(x) \end{cases}$$

$a_0 = a_n = 0$ por ser f(x) impar

$b_{2n-1} = 0$ por ser alternada en pares



y operando de modo análogo para b_{2n} al del caso anterior se obtendrá:

$$b_{2n} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(x)\,.\,\mathrm{sen}\ 2n\omega x\,.\,dx$$

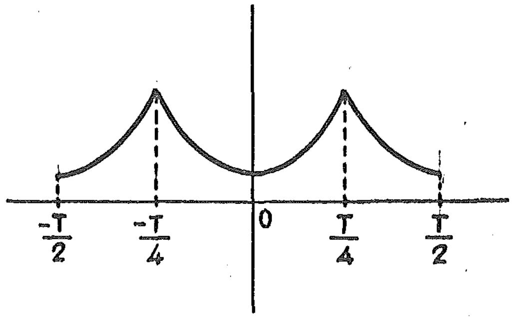
quedando el desarrollo:

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} b_{2n} . \text{sen } 2\omega x$$

ó sea un desarrollo en serie de senos pares.

VII.- Desarrollo en serie de cosenos pares.- Si se cumplen para f(x), las condiciones de los casos II y IV, ó sea:

$$\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ f(x+\frac{T}{2}) = f(x) \end{cases}$$



$b_n = 0$, por ser f(x) par

$a_{2n-1} = 0$, por ser alternada en pares

los demás coeficientes quedarán:

$$a_0 = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(x)\, dx$$

$$a_{2n} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(x) \cos 2n\omega x . dx$$

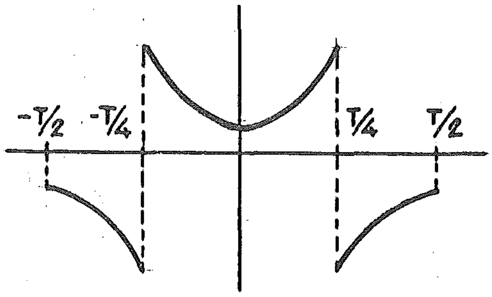
y el desarrollo será:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_{2n} . \cos 2n\omega x$$

se ha obtenido un desarrollo en serie de cosenos pares.

VIII.- Desarrollo en serie de cosenos impares.- Si f(x) cumple las condiciones de los casos II y III, ó sea:

$$\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ f(x+\frac{T}{2}) = - f(x) \end{cases}$$



$b_n = 0$ por ser f(x) par

$a_0 = 0$ por ser cero el valor medio de la función

$a_{2n} = 0$ por ser alternada en impares

y operando quedará:

$$a_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(x).\cos(2n-1)\omega x.dx$$

y el desarrollo quedará de la forma:

$$f(x) = \sum_1^{\infty} a_{2n-1}.\cos(2n-1)\,\omega\,x$$

ó sea un desarrollo en serie de <u>cosenos impares</u>.

La paridad ó imparidad que se menciona en los ocho casos considerados se refiere no a <u>x</u> sino a <u>ωx</u>.

4.- <u>Desarrollo en serie de Fourier en forma compleja</u>.-

Es normal en muchas aplicaciones representar las variables que oscilan armónicamente por vectores y éstos a su vez por complejos, por lo que es interesante expresar la serie de Fourier en forma exponencial imaginaria.

Para ello utilizaremos las fórmulas anteriores, sustituyendo sen $n\omega x$ y cos $n\omega x$ por:

$$\text{sen}\; n\omega x = \frac{e^{jn\omega x} - e^{-jn\omega x}}{2j}, \cos(n\omega x) = \frac{e^{jn\omega x} + e^{-jn\,\omega x}}{2}$$

con lo que quedará:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty}(a_n.\cos n\omega x + b_n.\text{sen}\, n\omega x) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \left[a_n . \frac{e^{jn\omega x} + e^{-jn\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega x} - e^{-jn\omega x}}{2j} \right]$$

y llamando:

$$c_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b_n}{j}\right), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{b_n}{j}\right), \quad c_0 = \frac{a_0}{2}$$

queda:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega x}$$

Si esta serie es uniformemente convergente y es f(x) su suma, multiplicamos los dos miembros de dicha igualdad por $e^{-jn\omega x}$, é integramos de $-\frac{T}{2}$ a $\frac{T}{2}$ obteniendo el valor de c_n,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) . e^{-jn\omega x} \, dx$$

5.- Cálculo de Σa_n^2, Σb_n^2 y $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$.-

En muchas ocasiones, nos interesa calcular las sumas anteriores sin necesidad de obtener todo el desarrollo en serie de Fourier. Para ello podemos proceder de la forma que a continuación se indica:

a) Cálculo de $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$.

Si f(x) es desarrollable en serie de Fourier se tendrá:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \left[a_n . \cos n\omega x + b_n \operatorname{sen} n\omega x \right]$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad anterior, é integramos de 0 a T.

$$\int_0^T [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{4} \int_0^T dx + \Sigma \left[a_n^2 . \int_0^T \cos^2 n\omega x . dx + b_n^2 \int_0^T \operatorname{sen}^2 n\omega x \, dx \right]$$

ya que las otras integrales que aparecen se anulan en el intervalo (0, T).

$$\int_0^T [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{4} . T + \frac{T}{2} . \Sigma (a_n^2 + b_n^2)$$

y de aquí sale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{T} \int_0^T [f(x)]^2 dx - \frac{a_0^2}{2}$$

b) Cálculo de $\sum a_n^2$ y $\sum b_n^2$.

El desarrollo en serie de Fourier es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n . \cos n\omega x + b_n \operatorname{sen} n\omega x) \tag{8}$$

poniendo (-x) en lugar de x queda:

$$f(-x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n . \cos n\omega x - b_n . \operatorname{sen} n\omega x) \tag{9}$$

Sumando y restando (8) y (9) queda:

$$f(x) + f(-x) = a_0 + 2 \sum_1^{\infty} a_n . \cos n\omega x \tag{10}$$

$$f(x) - f(-x) = 2 \sum_1^{\infty} b_n . \operatorname{sen} n\omega x \tag{11}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de (10) y (11), é integramos de $-\frac{T}{2}$ a $\frac{T}{2}$, las únicas integrales que no se anulan son:

$$\left.\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} [f(x)+f(-x)]^2 dx &= a_0^2 \int_{-T/2}^{T/2} dx + 4 \sum_1^{\infty} a_n^2 \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 n\omega x . dx \\ \int_{-T/2}^{T/2} [f(x)-f(-x)]^2 dx &= 4 \sum_1^{\infty} b_n^2 \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}^2 n\omega x dx \end{aligned}\right\} \text{ ó sea}$$

$$\left.\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} [f(x)+f(-x)]^2 dx &= a_0^2 . T + 2T . \sum a_n^2 \\ \int_{-T/2}^{T/2} [f(x)-f(-x)]^2 dx &= 2T \sum_1^{\infty} b_n^2 \end{aligned}\right\} \text{ de donde obtenemos}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{1}^{\infty} a_n^2 &= \frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(x)+f(-x)]^2 dx - \frac{a_0^2}{2} \\ \sum_{1}^{\infty} b_n^2 &= \frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(x)-f(-x)]^2 dx \end{aligned}\right\}$$

Evidentemente, conociendo $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$ y $\Sigma\, a_n^2$, se podría obtener $\Sigma\, b_n^2$ restando ambas sumas.

10

Series de funciones ortogonales

LECCION 10

SERIES DE FUNCIONES ORTOGONALES

1.- Funciones ortogonales y de cuadrado integrable.-

El desarrollo en serie de Fourier ya estudiado se puede generalizar, de forma muy útil para numerosos problemas de la Física matemática, abandonando la propiedad de periodicidad. Para ello vamos a dar las siguientes definiciones:

Decimos que las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$, definidas en el intervalo $[a,b]$, son ortogonales en dicho intervalo, si se verifica

$$\int_a^b f(x) \, . \, \varphi(x) \, . \, dx = 0$$

Para la existencia de estas integrales conviene considerar el espacio de las funciones reales $f(x)$, tales que existan las integrales

$$\int_a^b [\, f(x) \,]^2 \, . \, dx \qquad (2)$$

A estas funciones se les llama de cuadrado integrable. Cuando dos funciones son de cuadrado integrable, se cumple que son integrables cada una de ellas y su producto.

Para demostrarlo, escribamos la siguiente desigualdad que se cumple cualquiera que sea el valor de m, por ser positiva la función subintegral,

$$0 \leqslant \int_a^b [f(x)+m \, . \, g(x)]^2 \, dx = \int_a^b [f(x)]^2 \, dx + 2m \int_a^b f(x) \, . \, g(x) \, . \, dx + m^2 \, . \int_a^b [g(x)]^2 \, dx =$$

$$= Am^2 + 2Bm + C$$

llamando A, B, C a las integrales anteriores.

Para que se cumpla que la forma cuadrática $Am^2+2Bm+C$ sea positiva para cualquier valor de m, su discriminante ha de ser negativo, o sea

$$\Delta = B^2 - AC < 0, \quad B^2 < AC, \text{ o sea}$$

$$\left[\int_a^b f(x).g(x).dx\right]^2 < \int_a^b [g(x)]^2.dx \; . \int_a^b [f(x)]^2 \; . \; dx \qquad (3)$$

Esta expresión es la desigualdad de Schwarz, y se ve que si f(x) y g(x) son de cuadrado integrable, la función f(x). g(x) es integrable.

Si en (3), hacemos g(x) = 1, queda

$$\left[\int_a^b f(x).dx\right]^2 < (b-a) \int_a^b [f(x)]^2.dx$$

luego si f(x) es de cuadrado integrable, la función f(x) es integrable.

Decimos que una función de cuadrado integrable es normal si

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx = 1$$

Si $\int_a^b [f(x)]^2 dx = k > 0$, se puede normalizar dividiendo la función por $\sqrt{k}$.

2.- Sucesiones ortogonales.-

Dada la sucesión indefinida de funciones reales

$$\varphi_1(x), \; \varphi_2(x), \ldots, \; \varphi_n(x), \ldots$$

decimos que es ortogonal en el intervalo [a, b], si se cumple que cada par de ellas son funciones ortogonales (1), y además son de cuadrado integrable (2), o sea si cumplen las siguientes condiciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b \varphi_m(x).\varphi_n(x).dx = 0, \text{ si } m \neq n \\ \int_a^b [\varphi_n(x)]^2.dx = \lambda_n > 0 \end{array} \right\} \qquad (4)$$

A λ_n se le llama norma. Cuando $\lambda_n = 1$ decimos que las funciones están normalizadas y por lo tanto la sucesión la llamamos ortonormalizada. Se puede normalizar una sucesión ortogonal, dividiendo cada función $\varphi_n(x)$, por $\sqrt{\lambda_n}$.

La ortogonalidad la podemos expresar más brevemente así:

$$\int_a^b \varphi_m(x).\,\varphi_n(x).dx = \lambda_n . \,\delta_{m.n}$$

siendo $\delta_{m,n}$ la función delta de Kronecker definida por:

$$\begin{cases} \delta_{m,n} = 1, \text{ para } m = n \\ \delta_{m,n} = 0, \text{ para } m \neq n \end{cases}$$

3.- <u>Desarrollo de una función en serie de funciones ortogonales.</u>-

A partir de una sucesión ortogonal, formemos la serie

$$a_1 . \varphi_1(x) + a_2 . \varphi_2(x) + \ldots +$$
$$+ a_n . \varphi_n(x) + \ldots$$

Si esta serie es uniformemente convergente, define una función continua f(x) suma de la serie

$$f(x) = a_1 . \varphi_1(x) + a_2 . \varphi_2(x) + \ldots + a_n . \varphi_n(x) + \ldots \qquad (5)$$

Para que sea uniformemente convergente, bastará con que admita una serie numérica convergente mayorante de la dada. Por ejemplo, si $|\varphi_n(x)| < M_n$, en $[a,b]$, sería suficiente que la serie numérica $\Sigma M_n . |a_n|$ fuese convergente.

En la práctica, el problema que queremos resolver es similar al resuelto por Fourier, o sea dada una función f(x) y una sucesión ortogonal $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ en $[a,b]$, expresar f(x) de la siguiente forma:

$$f(x) = a_1 . \varphi_1(x) + a_2 . \varphi_2(x) + \ldots + a_n . \varphi_n(x) + \ldots \qquad (5)$$

Admitamos inicialmente que la serie sea uniformemente convergente en $[a,b]$. Multiplicando los dos miembros por $\varphi_n(x)$ é integrando en $[a,b]$, se obtiene el coeficiente a_n, recordando que se cumplen las condiciones (4),

$$\int_a^b f(x) . \varphi_n(x) dx = a_n . \int_a^b [\varphi_n(x)]^2 . dx = a_n . \lambda_n, \qquad (\lambda_n > 0)$$

$$a_n = \frac{1}{\lambda_n} . \int_a^b f(x) . \varphi_n(x) . dx \qquad (6)$$

A las constantes a_n se les llama coeficientes de Fourier de f(x) respecto de la sucesión $\varphi_n(x)$, y al desarrollo (5) <u>serie de Fourier relativa al sistema ortogonal</u> $\varphi_n(x)$ en $[a,b]$.

Obsérvese sin embargo que la relación (5) no será siempre cierta ni siquiera cuando la serie sea uniformemente convergente. Por ejemplo, si f(x) es ortogonal a todas las $\varphi_n(x)$, todos los coeficientes a_n serían nulos y por lo tanto la serie no representaría a f(x).

4.- Aproximación de funciones mediante sumas de términos ortogonales.-

En la práctica es frecuentemente importante sustituir una función f(x) por otra más sencilla que la represente de modo aproximadc y sea tal que el error sea mínimo. Un procedimiento normal consiste en desarrollar f(x) en serie de Taylor según las potencias de x-a; sin embargo esta aproximación es bastante buena en entornos suficientemente pequeños del valor x = a, pero a medida que nos alejamos de dicho valor el error aumenta. Por ello vamos a dar otro método mejor para aproximación en un intervalo.

Dadas las funciones ortogonales en [a,b],

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_n(x)$$

queremos sustituir f(x) por una combinación lineal de dichas funciones

$$f(x) = a_1 . \varphi_1(x) + a_2 . \varphi_2(x) + \dots + a_n . \varphi_n(x) \qquad (7)$$

El error cometido vendrá dado por la expresión:

$$e = a_1 . \varphi_1(x) + a_2 . \varphi_2(x) + \dots + a_n . \varphi_n(x)] - f(x) \qquad (8)$$

Vamos a determinar los coeficientes a_i con la condición de que sea mínimo el error cuadrático integral en el intervalo [a,b], o sea la integral

$$E = \int_a^b [a_1 . \varphi_1(x) + a_2 . \varphi_2(x) + \dots + a_n . \varphi_n(x) - f(x)]^2 . dx \qquad (9)$$

Para ello, deberán ser nulas las derivadas parciales de E respecto de a_1, a_2, ..., a_n. Teniendo en cuenta las relaciones (4) queda:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial E}{\partial a_1} = 0 \Longrightarrow a_1 . \lambda_1 = \displaystyle\int_a^b f(x).\varphi_1(x).dx \\ \dfrac{\partial E}{\partial a_2} = 0 \Longrightarrow a_2 . \lambda_2 = \displaystyle\int_a^b f(x).\varphi_2(x).dx \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial E}{\partial a_n} = 0 \Longrightarrow a_n . \lambda_n = \displaystyle\int_a^b f(x).\varphi_n(x)dx \end{array}\right.$$

de donde

$$a_p = \frac{1}{\lambda_p} \int_a^b f(x).\varphi_p(x).dx \ , \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

Cada coeficiente a_p depende sólo de la función $\varphi_p(x)$ de la que es coeficiente, por lo que si deseamos mejorar la aproximación de (7), con una nueva función adicional $\varphi_{n+1}(x)$, o sea expresar $f(x)$ de la forma

$$f(x) = a_1.\varphi_1(x)+\dots+a_n.\varphi_n(x)+a_{n+1}.\varphi_{n+1}(x) \tag{10}$$

nos valen todos los coeficientes a_1, a_2, ..., a_n, calculados para (7), y bastará con calcular

$$a_{n+1} = \frac{1}{\lambda_{n+1}} \int_a^b f(x).\varphi_{n+1}(x)$$

y sustituirlo en (10).

Obsérvese también que los coeficientes así calculados coinciden con los de la serie de Fourier relativa al sistema ortogonal $\varphi_n(x)$.

Así pues podemos decir que el polinomio obtenido al elegir un número finito de términos de la serie de Fourier de una función $f(x)$ respecto de un sistema ortogonal $\varphi_n(x)$, en un intervalo $[a,b]$, es el que da la aproximación óptima de la función $f(x)$, en el sentido de ser mínimo el error cuadrático integral en dicho intervalo.

5.- Cálculo del error.-

Calculemos el error cuadrático integral expresado en (9). Desarrollando dicha expresión y teniendo en cuenta (4), queda

$$E = \sum_1^n a_i^2 \cdot \lambda_i - 2 \sum_1^n a_i \cdot \int_a^b f(x) \cdot \varphi_i(x) dx + \int_a^b [f(x)]^2 dx = \sum_1^n a_i^2 \cdot \lambda_i - 2 \sum_1^n a_i^2 \cdot \lambda_i +$$

$$+ \int_a^b [f(x)]^2 dx = \int_a^b [f(x)]^2 dx - \sum_1^n a_i^2 \cdot \lambda_i$$

si las funciones están normalizadas ($\lambda_i = 1$).

$$E = \int_a^b [f(x)]^2 dx - \sum_{i=1}^n a_i^2$$

como $E > 0$, se obtiene la llamada desigualdad de Bessel.

$$\sum_1^n a_i^2 < \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

6.- Aproximación mediante una serie finita de Fourier.-

Consideremos la suma finita

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k [a_n . \cos n\omega x + b_n . \operatorname{sen} n\omega x]$$

que expresa la suma de los $(2k + 1)$ primeros términos de una serie de Fourier que representa a $f(x)$ en el intervalo $[- T/2, T/2]$.

Si aproximamos $f(x)$ por $S_k(x)$, o sea escribimos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n . \cos n\omega x + b_n . \operatorname{sen} n\omega x)$$

el error será:

$$e_k(x) = f(x) - S_k(x)$$

el error cuadrático medio valdrá:

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [e_k(x)]^2 dx = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(x) - S_k(x)]^2 dx \qquad (11)$$

Si calculamos el mínimo de E_k, anulando las derivadas parciales, se obtiene

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial E_k}{\partial a_0} &= 0 = -\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{k}(a_n.\cos n\omega x+b_n \operatorname{sen} n\omega x)\right]dx \\
\frac{\partial E_k}{\partial a_n} &= 0 = -\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{k}(a_n\cos n\omega x+b_n \operatorname{sen} n\omega x)\right].\cos n\omega x.dx \\
\frac{\partial E_k}{\partial b_n} &= 0 = -\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{k}(a_n\cos n\omega x+b_n \operatorname{sen} n\omega x)\right]\operatorname{sen} n\omega x dx
\end{aligned}\right.$$

y de aquí sale

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial E_k}{\partial a_0} &= \frac{a_0}{2}-\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x).dx = 0 \\
\frac{\partial E_k}{\partial a_n} &= a_n-\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos n\omega x dx = 0 \\
\frac{\partial E_k}{\partial b_n} &= b_n-\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\operatorname{sen} n\omega x dx = 0
\end{aligned}\right.$$

son los valores conocidos de la serie de Fourier.

El error (11) lo podemos calcular desarrollando dicha expresión

$$E_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(x)-S_k(x)]^2dx =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{[f(x)]^2-2f(x).S_k(x)+[S_k(x)]^2\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(x)]^2dx-\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)S_k(x)dx+\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[S_k(x)]^2dx \quad (12)$$

pero se tiene

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x).S_k(x)dx = \frac{2}{T}.\frac{a_0}{2}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{k} a_n.\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos n\omega x\, dx \;+$$

$$+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{k} b_n\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\text{sen}\, n\omega x dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n^2+b_n^2) \qquad (13)$$

por otro lado

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[S_k(x)]^2dx = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}(a_n\cos n\omega x + b_n\,\text{sen}\, n\omega x)]^2dx = \frac{a_0^2}{4} \;+$$

$$+\frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{k}(a_n^2+b_n^2) \qquad (14)$$

sustituyendo (13) y (14) en (12) queda

$$E_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(x)]^2dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{k}(a_n^2+b_n^2) + \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}(a_n^2+b_n^2) =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(x)]^2dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}(a_n^2+b_n^2)$$

7.- Funciones esféricas. Polinomios de Legendre.-

Se llaman funciones esféricas a una sucesión de polinomios de grados 0, 1, 2,...,n,... que verifiquen en el intervalo [-1,1], las condiciones de ortogonalidad, o sea

$$\int_{-1}^{1} P_m(x).P_n(x)dx = 0, \text{ si } m \neq n$$

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2.dx = \lambda_n > 0$$

Si $\lambda_n = 2/2n+1$, se llaman polinomios de Legendre.

Para calcular estos polinomios, partamos primero de las funciones esféricas de primer coeficiente la unidad

$$\begin{cases} Q_0(x) = 1 \\ Q_1(x) = x + a_1 \\ Q_2(x) = x^2 + b_1 x + b_2 \\ Q_3(x) = x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Expresando su ortogonalidad en [-1, 1], se obtiene

$$\int_{-1}^{1} Q_0 . Q_1 dx = \int_{-1}^{1} (x+a_1)dx = 0, \quad 2a_1 = 0, \quad Q_1(x) = x$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-1}^{1} Q_0 . Q_2 dx = \left[\frac{x^3}{3} + b_1 \frac{x^2}{2} + b_2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + b_2 = 0, \quad b_2 = -\frac{1}{3} \\ \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} Q_1 Q_2 dx = \left[\frac{x^4}{4} + b_1 \frac{x^3}{3} + b_2 \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = b_1 . \frac{2}{3} = 0, \quad b_1 = 0 \end{array}\right\} Q_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

y análogamente se obtiene

$$Q_3(x) = x^3 - \frac{3}{5} x$$

$$Q_4(x) = x^4 - \frac{6}{7} x^2 + \frac{3}{65}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Para hallar los polinomios de Legendre multiplicamos cada polinomio $Q_n(x)$ por el factor necesario para que

$$\int_{-1}^{1} (A_n . Q_n)^2 dx = \int_{-1}^{1} [p_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

y se obtienen los polinomios de Legendre

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$
$$P_5(x) = \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{35}{8}x$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Se puede demostrar la fórmula general que cumplen

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot D^n(x^2-1)^n$$

8.- Proceso de ortogonalización de E. Schmidt.-

El proceso que se ha seguido para la obtención de las funciones esféricas, se puede observar que ha consistido en partir de la sucesión de funciones linealmente independientes

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots\ ,\ x^n,\ \ldots$$

y formar las combinaciones lineales $Q_n(x)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, expresado después su ortogonalidad en el intervalo $[-1, 1]$.

Este proceso anterior fué generalizado por Schnidt del siguiente modo:

Consideremos una sucesión de funciones linealmente independientes, integrables en un intervalo $[a,b]$, tanto ellos como sus productos binarios

$$f_o(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots\ ,\ f_n(x),\ \ldots$$

y formemos las combinaciones lineales de coeficientes indeterminados

$$\varphi_o = f_o$$
$$\varphi_1 = f_1 + a_{10} \cdot f_o$$
$$\varphi_2 = f_2 + a_{21} \cdot f_1 + a_{20} f_o$$
$$\varphi_3 = f_3 + a_{32} \cdot f_2 + a_{31} \cdot f_1 + a_{30} \cdot f_o$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_n = f_n + a_{n,n-1} \cdot f_{n-1} + \cdots\cdots + a_{n_o} \cdot f_o$$

Expresando la ortogonalidad entre φ_o y φ_1 en $[a,b]$, podremos calcular a_{10}:

$$\int_a^b \varphi_1 \cdot \varphi_o \cdot dx = \int_a^b [f_1 f_o + a_{10} \cdot f_o^2]\, dx = 0$$

Análogamente la ortogonalidad de φ_o, φ_1 y φ_2 nos dará a_{21} y a_{20}, pudiendo de este modo determinar de modo unívoco la sucesión de funciones ortogonales en $[a, b]$

$$\varphi_o(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots\ ,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

Para normalizarlas, bastará dividirlas por su norma.

Este problema es caso particular de este otro:

En un espacio vectorial se puede construir de manera efectiva bases ortogonales. Supongamos un espacio vectorial de dimensión n, y consideremos en él un sistema libre de n vectores $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$. Construyamos el siguiente conjunto de nuevos vectores:

$$\begin{cases} \vec{y}_1 = \vec{x}_1 \\ \vec{y}_2 = a_1\vec{y}_1 + \vec{x}_2 \\ \vec{y}_3 = b_1\vec{y}_1 + b_2\vec{y}_2 + \vec{x}_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{y}_n = l_1\vec{y}_1 + l_2\vec{y}_2 + \ldots + l_{n-1}\vec{y}_{n-1} + \vec{x}_n \end{cases}$$

Como debe ser $\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_1 = 0$ se tiene: $a_1\vec{y}^{\,2}_1 + \vec{x}_2\vec{y}_1 = 0$. De aquí sale el valor de a_1. Además $\vec{y}_2$ no puede ser cero porque el sistema $(\vec{y}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots, \vec{x}_n)$ es libre.

De las relaciones $\begin{cases} \vec{y}_3 \cdot \vec{y}_1 = 0 \\ \vec{y}_3 \cdot \vec{y}_2 = 0 \end{cases}$ se deduce

$$\begin{cases} b_1\,\vec{y}^{\,2}_1 + \vec{x}_3\vec{y}_1 = 0 \\ b_2\,\vec{y}^{\,2}_2 + \vec{x}_3\vec{y}_2 = 0 \end{cases}$$

de donde se calcula b_1 y b_2. El vector $\vec{y}_3$ tampoco puede ser nulo porque el sistema $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_3, \ldots, \vec{x}_n)$ es libre.

Continuando así se obtiene el sistema de vectores $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n)$ tal que ninguno es nulo y que son dos a dos ortogonales. Dividiendo cada uno de estos vectores por su módulo se obtiene el sistema ortonormal de vectores

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{y}_i}{|\vec{y}_i|} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

que resuelve el problema planteado.

9.- Otro tipo de ortogonalidad.-

El concepto de sucesión de funciones ortogonales generaliza en varias direcciones. Una de esas generalizaciones se expone a continuación. Un conjunto $\{f_n(x)\}$ (n = 0, 1, 2, ...) es ortogonal en un intervalo $[a,b]$ con relación a una función de peso p(x) dada (se supone $p(x) \geqslant 0$ en $[a,b]$) si se verifica

$$\int_a^b p(x)\ f_m(x).f_n(x)dx = 0$$

cuando $m \neq n$. La norma de $f_n(x)$ se define, naturalmente, así:

$$N\ [f_n(x)] = \int_a^b p(x).f^2_n(x)\,dx$$

Este tipo de ortogonalidad puede reducirse al tipo ordinario en el cual la función de peso es $p(x) = 1$. Basta tomar como funciones del conjunto los productos $\sqrt{p(x)}\ .\ f_n(x)$.

Ejemplo notable es el de los polinomios de Tchebycheff definidos así:

$$T_0(x) = 1,\quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x)$$

y que forman un sistema ortonormal de polinomios con la función de peso $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en el intervalo $[-1, 1]$ puesto que

$$\int_{-1}^{1} T_n(x).\ T_m(x)\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2^{n+m-2}}\int_0^{\pi} \cos(n\vartheta).\cos(m\vartheta).\ d\vartheta = 0 \quad (m \neq n)$$

He aquí los primeros polinomios de Tchebycheff

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 1)$$
$$T_3(x) = \frac{1}{2^2}(4\ x^3 - 3x)$$
$$T_4(x) = \frac{1}{2^3}(8\ x^4 - 8\ x^2 + 1)$$

etc. ...

Obtención de $T_4(x)$, por ejemplo. Se tiene $T_4(x) = \frac{1}{2^3}\cos(4 \text{ arc cos } x)$

Pero $\cos(4\vartheta) = \frac{1}{2}[(\cos\vartheta + i \text{ sen}\vartheta)^4 + (\cos\vartheta - i \text{ sen}\vartheta)^4] =$

$$= \frac{1}{2}[2\cos^4\vartheta - 2\binom{4}{2}\cos^2\vartheta \text{ sen}^2\vartheta + 2\binom{4}{4}\text{sen}^4\vartheta] =$$

$$= \cos^4\vartheta - 6\cos^2\vartheta(1-\cos^2\vartheta) + (1-\cos^2\vartheta)^2 = 8\cos^4\vartheta - 8\cos^2\vartheta + 1$$

Como $\cos\vartheta = x$ resulta

$$T_4(x) = \frac{1}{2^3}[8x^4 - 8x^2 + 1]$$

En general

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}[\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2-1})^n + \frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2-1})^n]$$

Los polinomios de Tchebycheff se pueden obtener también como coeficientes de las potencias de u en el desarrollo en serie de la función generatriz

$$\frac{1-u^2}{1-2ux+u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T(x)(2u)^n$$

Algunos autores llaman a los polinomios $T_n(x)$, de Tchebycheff de 1ª especie, y definen otros llamados de segunda especie de la siguiente manera: Si calculamos $\text{sen}(n\vartheta)$ resulta:

$$\text{sen}(n\vartheta) = \binom{n}{1}(\cos\vartheta)^{n-1}\text{sen}\vartheta - \binom{n}{3}(\cos\vartheta)^{n-3}(\text{sen}\,\vartheta)^3 + \dots$$

Poniendo como antes $\cos\vartheta = x$ se tiene:

$$\text{sen}(n\vartheta) = \text{sen}\vartheta\,[\binom{n}{1}x^{n-1} - \binom{n}{3}x^{n-3}(1-x^2)^2 + \dots] = \sqrt{1-x^2}\,.$$

[Polinomio en x]. Estos polinomios divididos por las potencias sucesivas 2^{n-1} para que el primer coeficiente sea 1 son los llamados de 2ª especie y se representan por $U_n(x)$, siendo por lo tanto $U_n(x) = \frac{\text{sen } n\,\vartheta}{2^{n-1}.\,\text{sen}\,\vartheta}$

Calculemos los primeros polinomios de 2ª especie:

$$n = 1 \;;\quad U_1(x) = \frac{1}{2^0}\cdot\frac{\text{sen}\,\vartheta}{\text{sen}\,\vartheta} = 1$$

$$n = 2 \;;\quad U_2(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\text{sen}\,2\vartheta}{\text{sen}\,\vartheta} = \frac{1}{2}\;\frac{2\,\text{sen}\,\vartheta\,.\,\cos\vartheta}{\text{sen}\,\vartheta} = x$$

$$n = 3 \; ; \qquad U_3(x) = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 3\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} = \frac{1}{4} \; \frac{\operatorname{sen}(2\vartheta + \vartheta)}{\operatorname{sen}\vartheta} =$$

$$= \frac{1}{4} \; \frac{2\cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta + \cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta - \operatorname{sen}^3\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} = \frac{1}{4} \left(3\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(3x^2 - 1 + x^2\right) = x^2 - \frac{1}{4}$$

Análogamente se obtendrían

$$U_4(x) = x^3 - \frac{x}{2}$$

$$U_5(x) = x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{16}$$

....

Veamos ahora la propiedad de ortogonalidad. Para ello, si en la integral si en la integra l

$$\int_{-1}^{1} U_n(x) . U_m(x) . (1-x^2) . \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

hacemos el cambio $x = \cos\vartheta$ queda

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(n\vartheta)\operatorname{sen}(m\vartheta)d\vartheta = 0 \qquad m \neq n$$

Luego dichos polinomios constituyen un sistema ortogonal de funciones - conrrespecto a la función de peso $\sqrt{1 - x^2}$ en el intervalo $(-1, 1)$.

Una propiedad notable del polinomio $T_n(x)$ de 1ª especie es la siguiente: Entre los polinomios de grado n con primer coeficiente 1, $T_n(x)$ es el que tiene menor valor máximo absoluto, en el intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 1$; es decir, $T_n(x)$ es el polinomio que menos se desvía de cero.

La demostración puede verse en el libro de Courant-Hilbert.

10.- Principales polinomios ortogonales.-

A título de resumen escribamos un cuadro, con los polinomios ortogonales más frecuentes en las aplicaciones

Intervalo	Función peso	Polinomio	Condiciones adicionales
-1, 1	1	$p_n(x)$. Legendre	$p_n(1) = 1$
-1, 1	$(1-x^2)^{-1/2}$	$T_n(x)$. Tchebycheff 1ª especie	Norma = $\frac{\pi}{2}$
-1, 1	$(1-x^2)^{1/2}$	$U_n(x)$. Tchebycheff 2ª especie	Norma = $\pi/2$
-1, 1	$(1-x)^{\alpha}.(1+x)^{\beta}$	$p_n^{\alpha,\beta}(x)$. Jacobi	$p_n^{\alpha,\beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$
0, ∞	e^{-x}	$L_n(x)$. Laguerre, clásicos	Norma $= \Gamma(n+\alpha+1)/n!$
0, ∞	$e^{-x}.x$ $(\alpha > -1)$	$L_n^{\alpha}(x)$. Laguerre, generales	
$-\infty, \infty$	$e^{-x^2/2}$	$H_{2n}(x)$. Hermite	$\begin{cases} H_{2n}(0) = (-1)^n . \frac{(2n)!}{n!} \\ H_{2n+1}(0) = 0 \end{cases}$

Siendo las expresiones de dichos polinomios las siguientes

$$p_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}.x^{n-4} - \dots\right]$$

$$T_n(x) = \left[(x+j\sqrt{1-x^2})^n + (x-j\sqrt{1-x^2})^n\right].\frac{1}{2^n}$$

$$U_n(x) = -\left[(x+j\sqrt{1-x^2})^{n+1} - (x-j\sqrt{1-x^2})^{n+1}\right].2^{-n}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$p_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+\alpha}{i}.\binom{n+\beta}{n-i}(x-1)^{n-i}.(x+1)^i \; ; \; p_0^{\alpha,\beta}(x) = 1$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i.\frac{1}{i!}\binom{n}{i}.x^i \; ; \; L_0(x) = 1$$

$$L_n^{\alpha}(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+n}.\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{i!\,(n-i)!\,\Gamma(n+\alpha-i+1)}.x^{n-i}; \quad L_0^{\alpha}(x) = 1$$

$$H_n(x) = (-1)^n.\sum_{i=0}^{n/2}(-1)^i.\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i+1).\Gamma(n-2i+1)}.(2x)^{n-2i}; \; H_0(x) = 1$$

11.- Integral de Fourier. La transformación de Fourier.-

El alumno ha estudiado ya el desarrollo en serie de Fourier de una función periódica, percatándose de la enorme importancia física que tiene tal desarrollo porque permite descomponer un fenómeno, que puede ser complicado, en suma de fenómenos de carácter sinusoidal cuyo estudio es mucho más sencillo.

Se comprende el interés que puede tener el extender el método a funciones no periódicas. La idea consiste en considerar una función periódica de período T, que se hace crecer tendiendo a infinito, y observar lo que pasa en su desarrollo en serie de Fourier.

Para exponer esta idea con cierto detalle recordemos que el desarrollo en serie de Fourier de una función f(x) periódica de período T que satisface las condiciones de Dirichlet, es de la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega x) + a_2 \cos(2\omega x) + \dots + a_n \cos(n\omega x) + \dots +$$

$$+ b_1 \operatorname{sen}(\omega x) + b_2 \operatorname{sen}(2\omega x) + \dots + b_n \operatorname{sen}(n\omega x) + \dots$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) . \cos(n\omega x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) . \operatorname{sen}(n\omega x) dx$$

(a es un número real cualquiera y $\omega = \frac{2\pi}{T}$).

En forma compleja se tiene:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n . e^{jn\omega x} \tag{15}$$

siendo:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) . e^{-jn\omega x} . dx \tag{16}$$

Si en (15) se sutituye la expresión (16) de c_n se obtiene:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jn\omega x} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) . e^{-jux} . dx$$

Sustituyendo $n\omega$ por u y recordando que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ se puede escribir:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{jux} . \omega . \int_{-T/2}^{T/2} f(x) . e^{-jux} . dx$$

Cuando T crece tendiendo a ∞, los límites de la integral se convierten en $-\infty$ y $+\infty$. Como $\omega \to 0$ y por otra parte $\omega = (n+1)\omega - n\omega$ no extraña que se asigne a $\underline{\omega}$ el papel de Δu, y la suma que aparece en la fórmula anterior se convertirá en integral, con lo cual cabe esperar que se cumpla

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} \, . \, du \, . \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \; e^{-jux} \, . \, dx \tag{17}$$

Este razonamiento intuitivo (que naturalmente no es ninguna demostración) ha permitido llegar a la fórmula (17) que se llama integral de Fourier. Este resultado ha sido demostrado rigurosamente (Véase por ejemplo Courant-Hilbert - "Methods of Mathematical Physics") en las siguientes hipótesis:

a) La función f(x) es "parcialmente contínua" es decir o es contínua o sólo tiene discontinuidades de primera especie.

b) La integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \; dx \qquad \text{es convergente.}$$

Conviene advertir que al segundo miembro de la fórmula (17), en los puntos de discontinuidad de la función f(x), adquiere el valor $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, es decir la media aritmética de los límites laterales de la función.

Dada una función f(x) se llama transformada de Fourier de f(x) a la función

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, . \, e^{-iux} \, . \, dx \tag{18}$$

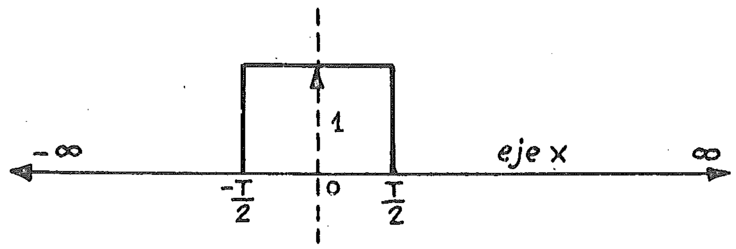
De (17) se deduce que conocida la transformada de Fourier F(u), se puede encontrar la función de partida f(x) mediante la fórmula

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \; . \; e^{iux} \, . \, dx \tag{19}$$

que recibe el nombre de fórmula de inversión de la transformación de Fourier. También se designa a f(x) como transformada inversa de Fourier de F(u).

Aunque f(x) es una función de variable real, puede ocurrir que F(u) tenga parte real e imaginaria, debido a la presencia de j en el segundo miembro de (18).

Para terminar, expondremos un ejemplo. Sea la función "impulso" de duración $\underline{T}$ de la figura,



definida así:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\infty < x < -\frac{T}{2} \\ 1 & \text{si} \quad -\frac{T}{2} < x < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si} \quad -\frac{T}{2} < x < \infty \end{cases}$$

La transformada de Fourier es:

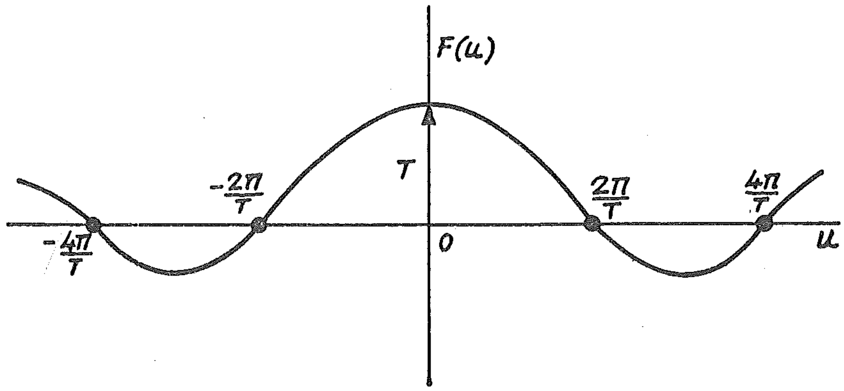
$$F(u)= \int_{-\infty}^{-T/2} 0 . e^{-jux} dx + \int_{-T/2}^{T/2} 1 . e^{-jux} dx + \int_{T/2}^{0} 0 \, . \, e^{-jux} \, . \, dx$$

Las integrales primera y tercera son nulas. La segunda vale

$$F(u) = -\frac{1}{ju}(e^{-ju\frac{T}{2}} - e^{ju\frac{T}{2}}) = \frac{T}{u.\frac{T}{2}} \cdot \frac{e^{ju\frac{T}{2}} - e^{-ju\frac{T}{2}}}{2} = T. \frac{\operatorname{sen}(u.\frac{T}{2})}{u \, . \, \frac{T}{2}}$$

el resultado es una función de valores reales.

La representación gráfica es la siguiente:



De la observación de la figura se deduce que la separación entre los "ceros" de la función es inversamente proporcional a la duración del impulso. Así, para un impulso de muy corta duración los ceros estarán muy separados, mientras que para un impulso de larga duración estarán muy próximos. En las aplica ciones esta figura recibe el nombre de "espectro". Como caso límite, para un impulso de duración infinita, la separación entre ceros se convierte en infinitesimal, resultando un espectro de una sola línea (para u = 0). Para un impulso de una duración infinitamente pequeña, los primeros ceros tienden a alejarse infinitamente del origen, resultando un espectro llamado de banda.

En el estudio de los amplificadores se verá la utilidad de estas consideraciones.

12.- Transformada de Laplace.-

Consideremos la función de variable real x, continua y definida para todos los valores del intervalo $x \geqslant 0$. Se define como transformada de Laplace de la función f(x) y se representa por L [f(x)] a la siguiente integral

$$L\,[f(x)] = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px}.f(x).dx$$

A la función f(x) se le llama transformada inversa de Laplace ó función generatriz Laplace de F(p) y se escribe así

$$f(x) = L^{-1}[F(p)]$$

Con las transformadas de Laplace se logra simplificar la solución de numerosos problemas, por ejemplo reducir la resolución de ecuaciones diferenciales a operaciones algebráicas simples. Conocida la transformada, se puede hallar la función generatriz mediante tablas ó bien mediante los métodos de cálculo que se estudiarán después de haber visto las funciones de variable compleja. Una tabla muy completa de transformadas integrales figura en el libro "Tables of integrals transforms", del Balteman Project Staff (Mc Graw-Hill).

Vamos a poner la tabla de las transformadas de las funciones más elementales.

Función	Transformada
f(x)	$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px}.f(x).dx$
1	$\frac{1}{p}$
sen ax	$\frac{a}{p^2+a^2}$

Función	Transformada
$\cos ax$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
e^{-ax}	$\frac{1}{p+a}$
$\mathrm{Sh}\,ax$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\mathrm{Ch}\,ax$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$e^{-\alpha x}.\,\mathrm{sen}\,ax$	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$
$e^{-\alpha x}.\cos ax$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$
x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$x.\,\mathrm{sen}\,ax$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
$x.\cos ax$	$-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2}$
$x.e^{-ax}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$

13.- Otras transformadas integrales.-

Además de las transformadas de Laplace y de Fourier ya vistas existen otras varias que resumiremos aquí. En general, se define como transformada integral de una función f(x) a la función F(p) siguiente:

$$F(p) = \int_a^b Q(p.x).f(x).dx$$

a la función Q(p.x) se le llama núcleo de la transformación.

Las más importantes son las siguientes:

a) Transformada de Fourier (compleja)

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x).e^{-jpx}.dx$$

b) Transformada de Laplace.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x).e^{-px}.dx$$

c) Transformada de Fourier (seno)

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x).\text{sen } px.dx$$

d) Transformada de Fourier (coseno)

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x).\cos px.dx$$

e) Transformada de Hankel

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x).x.J_n(px)dx$$

donde J_n es la función de Bessel.

f) Transformada de Mellin

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x).x^{p-1}.dx$$

g) Transformada de Carson

$$F(p) = p.\int_0^{\infty} f(x).e^{-px}.dx$$

Como ya se ha citado anteriormente figura una tabla muy completa de transformadas integrales en "Tables of integrals transforms", del Bateman Project Staff (Mc Graw-Hill).